LA VERA PROBABILITÀ DI UN INTERVALLO DI FIDUCIA

Giacomo Lorenzoni
qualifications/experience: http://orcid.org/0000-0002-2329-2881
email: info@giacomo.lorenzoni.name; info@pec.giacomo.lorenzoni.name

SOMMARIO

La determinazione di un intervallo di fiducia, che insieme al test statistico è la più nota procedura di statistica inferenziale, ha come risultato la probabilità che un certo parametro statistico sia contenuto in una certa zona della retta reale. Tuttavia tale risultato non gode di unanimità poiché è molto diffusa l'opinione del non trattarsi propriamente di una probabilità e di doverlo chiamare soltanto "fiducia". A ciò si aggiunge la perplessità del poter sostituire, come si evidenzia nell'articolo, la detta probabilità con molte altre altrettanto affidabili.

Queste incertezze sono affrontate distinguendo la probabilità vera di un evento tra le tante che possono essere definite in modo meramente convenzionale, e quindi scegliendo come risultato della determinazione di un intervallo di fiducia l'inerente probabilità vera che, pure non essendo esattamente calcolabile, è però illimitatamente approssimabile.

A tale scopo è preliminarmente dedicata molta cura nel definire la simbologia e i concetti di logica e insiemistica necessari per le successive deduzioni, sostanzialmente riprendendo contenuti di [1] quali le originali definizioni algoritmiche di relazioni e operazioni tra insiemi, l'inconsueta formulazione riguardante l'uguaglianza tra intersezione di prodotti e prodotto di intersezioni, e in particolare presentando una forma ampliata della importante tautologia che include la nota *legge di contrapposizione*.

La trattazione di eventi e probabilità esposta in [1] è riassunta, semplificata e integrata da nuove decisive posizioni. È dedicato molto spazio all'evento costituito dall'accadere una costante incognita in una certa zona della retta reale ed alla sua probabilità, in quanto fondamentali per la trattazione dell'intervallo di fiducia che è poi dettagliatamente dedotta e specificata per i due casi, di grande importanza nelle scienze sperimentali, costituiti dall'essere il parametro statistico la media o la varianza di una variabile casuale normale.

Parole chiave: intervallo di fiducia, probabilità, statistica, logica proposizionale, teoria degli insiemi, combinatoria.

THE TRUE PROBABILITY OF A CONFIDENCE INTERVAL

ABSTRACT

The calculation of a confidence interval, which together with the hypothesis testing is the best known procedure of inferential statistics, has as result the probability that a certain statistical parameter is contained in a certain part of the real line. However, this result does not enjoy of unanimity because it is widely believed the not be strictly a probability and that must be called only confidence. To this is added the perplexity of being able to replace, as is highlighted in the article, the said probability with many other equally reliable.

These uncertainties are tackled by distinguishing, among all those of the same event, only one probability true and therefore not merely conventional, and then choosing, as result of the determination of a confidence interval, the true inherent probability which, although it is not exactly calculable, however is unlimitedly approximable.

For this purpose, it is preliminarily dedicated much care in defining the symbology and the concepts of logic and set theory needed for the subsequent deductions, substantially taking again notions of [1] such as the original algorithmic definitions of relations and operations between sets, the unusual formulation concerning the equality between the intersection of products and the product of intersections, and an expanded form of the important tautology that includes the known "law of contraposition".

The treatment of events and probability exposed in [1] is summarized, simplified and integrated by new decisive positions. It is thoroughly analyzed the event constituted by the happen an unknown constant into a certain part of the real line and its probability, because fundamental for the treatment of the confidence interval which is then deduced and specified in detail for the two cases, of great importance in the experimental sciences, that are had when the statistical parameter is the mean or the variance of a normal random variable.

Key words: confidence interval, probability, statistics, propositional logic, set theory, combinatorics.

1. INTRODUZIONE

Si dice *intervallo di fiducia* in riferimento a una delle più note procedure di statistica inferenziale. Tale procedura determina, per mezzo di un campione, un valore della probabilità (i.e. *fiducia*) che un parametro dell'inerente universo è contenuto in una arbitraria zona (e.g. *intervallo*) della retta reale. Tuttavia la convenzionalità di tale valore è resa subito evidente dal fatto che la sostituzione del detto campione con un suo sottoinsieme determina generalmente un diverso e ugualmente credibile valore della stessa probabilità.

In questo lavoro sono definiti il valore vero (e quindi non meramente convenzionale) della detta probabilità e un'approssimazione di tale valore che può essere migliorata arbitrariamente. A tale scopo è ripresa la trattazione dell'intervallo di fiducia esposta in [1].

A questo riguardo un certo numero di autori ritiene che la detta fiducia non sia una vera e propria probabilità, ma gli argomenti a sostegno di tale opinione non sono sembrati decisivi a fronte della coerenza logica delle seguenti deduzioni.

1 PRELIMINARI DI LOGICA E INSIEMISTICA

In relazione ai seguenti concetti di logica si fa riferimento a [1], [2], [3], [4].

Una proposizione è un insieme di simboli grafici. Un nome è una proposizione che riferisce e rappresenta un certo oggetto, che da sola esprime un significato (e.g. "casa") o non (e.g. "A"), e che attribuisce al detto oggetto le proprietà indicate dal suo eventuale significato. Un oggetto è individuato dall'insieme di tutte le sue proprietà.

Una $A \equiv B$ afferma che A e B sono due nomi di uno stesso oggetto e quindi reciprocamente sostituibili. Di conseguenza una $A \equiv B$ implica che A ha anche l'eventuale significato di B (e viceversa).

Un abbinamento di due nomi A e B è un terzo nome (e.g. A_B) che ha entrambi i significati degli altri due, perciò se A ha un significato allora questo è anche di A_B (e analogamente per B).

In identifying the members of an expression, each "≡" is considered, coherently with the parentheses, at last (and analogously "≢", "=", "≠"). Si intende $Ş\langle ş\rangle \equiv Ş_{ş}$, $\wedge \equiv$ AND $\equiv$ *congiunzione*, $\vee \equiv$ OR $\equiv$ *disgiunzione inclusiva*, $\dot{\vee} \equiv$ XOR $\equiv$ *disgiunzione esclusiva*.

Essendo $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_A$ e $\mathcal{P}_B$ tre proposizioni, si intende, coerentemente con l'usare le parentesi "{}" o "$\{\!\!\{\ \}\!\!\}$" per delimitare rispettivamente una proposizione generica o che definisce un evento, $\{\!\!\{\mathcal{P}\}\!\!\} \equiv$ "$\mathcal{P}$ è vera", $\neg\{\!\!\{\mathcal{P}\}\!\!\} \equiv$ "$\mathcal{P}$ è falsa", $\neg\mathcal{P}$ la proposizione vera se $\neg\{\!\!\{\mathcal{P}\}\!\!\}$ e falsa se $\{\!\!\{\mathcal{P}\}\!\!\}$, $\{\mathcal{P}_A \equiv \mathcal{P}_B\} \equiv \{\neg\mathcal{P}_A \equiv \neg\mathcal{P}_B\}$,

$$\{\mathcal{P}_A \mid \mathcal{P}_B\} \equiv \text{“}\mathcal{P}_A \text{ sottoposta alla condizione } \mathcal{P}_B\text{”} \equiv \text{“}\mathcal{P}_A \text{ di cui } \mathcal{P}_B\text{”} \equiv \text{“}\mathcal{P}_A \text{ dove } \mathcal{P}_B\text{”}$$

$$\text{“È sottintesa } \mathcal{P}_B\text{”} \equiv \{\mathcal{P}_A \equiv \{\mathcal{P}_A \mid \mathcal{P}_B\};\ \forall\mathcal{P}_A\} \tag{1}$$

e $\underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\langle\mathcal{P}_B \,\vdots\, \mathcal{P}_A\rangle$ un insieme di proposizioni dal quale è logicamente deducibile $\mathcal{P}_B$ essendo tali proposizioni tutte vere tranne $\mathcal{P}_A$ che può essere vera o falsa.

Indicando $\Rightarrow$ e $\underline{\rightarrow}$ i due logical connectives chiamati rispettivamente *entailment* or *logical implication* or *logical consequence* and *material conditional* or *material implication* or *material consequence*, si pone

$$\{\mathcal{P}_A \Rightarrow \mathcal{P}_B\} \equiv \{\mathcal{P}_B \Leftarrow \mathcal{P}_A\} \equiv \exists\underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\langle\mathcal{P}_B \,\vdots\, \mathcal{P}_A\rangle \equiv \text{“}\mathcal{P}_B \text{ è logicamente deducibile da } \mathcal{P}_A\text{”} \equiv \text{“Una argomentazione conduce da } \mathcal{P}_A \text{ a } \mathcal{P}_B\text{”} \equiv$$

$$\text{“}\mathcal{P}_B \text{ è logicamente dimostrabile a partire da } \mathcal{P}_A\text{”} \equiv \text{“}\mathcal{P}_B \text{ è una logica conseguenza di } \mathcal{P}_A\text{”}$$

$$\{\mathcal{P}_A \Leftrightarrow \mathcal{P}_B\} \equiv \{\mathcal{P}_A \Rightarrow \mathcal{P}_B\} \wedge \{\mathcal{P}_A \Leftarrow \mathcal{P}_B\} \qquad \{\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B\} \equiv \{\mathcal{P}_B \underline{\leftarrow} \mathcal{P}_A\} \equiv \{\{\!\!\{\mathcal{P}_A\}\!\!\} \Rightarrow \{\!\!\{\mathcal{P}_B\}\!\!\}\}\text{”} \underline{\leftarrow} \{\mathcal{P}_A \Rightarrow \mathcal{P}_B\}$$

$$\{\mathcal{P}_A \underline{\leftrightarrow} \mathcal{P}_B\} \equiv \{\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B\} \wedge \{\mathcal{P}_A \underline{\leftarrow} \mathcal{P}_B\} \equiv \{\{\!\!\{\mathcal{P}_A\}\!\!\} \Leftrightarrow \{\!\!\{\mathcal{P}_B\}\!\!\}\} \equiv \{\mathcal{P}_A \equiv \mathcal{P}_B\} \tag{2}$$

$$\{\text{from: } A_1; A_2; \ldots; A_i; \text{ follows } B_0\square_1 B_1\square_2 B_2 \ldots \square_i B_i \square_{i+1} B_{i+1} \ldots \square_{i+j} B_{i+j}\} \equiv \{A_1 \underline{\rightarrow} \{B_0\square_1 B_1\}; A_2 \underline{\rightarrow} \{B_1\square_2 B_2\}; \ldots; A_i \underline{\rightarrow} \{B_{i-1}\square_i B_i\}\}$$

where: each of $\{\square_1, \square_2, \ldots, \square_{i+j}\}$ is a generally different relational symbol, as for example one of $\{\equiv,\not\equiv,=,\neq\}$; $\{\square_{i+1}B_{i+1}\ldots\square_{i+j}B_{i+j}\}$ may be absent and if is present the validity of its presence is considered evident; each of $\{A_1, A_2, \ldots, A_i\}$ is replaced by symbol "þ" when is considered evident (or is highlighted after) the validity of the corresponding element of $\{\{B_0\square_1 B_1\}, \{B_1\square_2 B_2\}, \ldots, \{B_{i-1}\square_i B_i\}\}$.

Una $\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B$ è un $\underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\langle\mathcal{P}_B \,\vdots\, \mathcal{P}_A\rangle$ di cui si considera convenzionalmente la sola $\mathcal{P}_A$, nel senso che tutte le sue proposizioni certamente vere (i.e. tutte tranne $\mathcal{P}_A$) sono implicitamente trattate come tali e sono quindi contestualmente ignorate come ovvie. Ciò evidenzia immediatamente $\{\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B\} \underline{\rightarrow} \exists\underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\langle\mathcal{P}_B \,\vdots\, \mathcal{P}_A\rangle$. Inoltre tale identità di $\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B$ e la sempre possibile faculty di considerare come detto convenzionalmente la sola $\mathcal{P}_A$ di un $\underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\langle\mathcal{P}_B \,\vdots\, \mathcal{P}_A\rangle$ rendono evidente anche $\exists\underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\langle\mathcal{P}_B \,\vdots\, \mathcal{P}_A\rangle \underline{\rightarrow} \{\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B\}$. Pertanto si ha $\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B \equiv \exists\underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\langle\mathcal{P}_B \,\vdots\, \mathcal{P}_A\rangle$. Questa e $\mathcal{P}_A \Rightarrow \mathcal{P}_B \equiv \exists\underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\langle\mathcal{P}_B \,\vdots\, \mathcal{P}_A\rangle$ portano $\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B \equiv \mathcal{P}_A \Rightarrow \mathcal{P}_B$.

In conformità con la (2.1.1.1) di [1] si ha

$$\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B \equiv \neg\mathcal{P}_B \underline{\rightarrow} \neg\mathcal{P}_A \equiv \text{“}\{\!\!\{\mathcal{P}_A\}\!\!\} \text{ è sufficiente per } \{\!\!\{\mathcal{P}_B\}\!\!\}\text{”} \equiv \text{“}\{\!\!\{\mathcal{P}_B\}\!\!\} \text{ è necessaria per } \{\!\!\{\mathcal{P}_A\}\!\!\}\text{”} \equiv \text{“}\{\!\!\{\mathcal{P}_B\}\!\!\} \text{ se } \{\!\!\{\mathcal{P}_A\}\!\!\}\text{”} \equiv \text{“}\{\!\!\{\mathcal{P}_A\}\!\!\} \text{ solo se } \{\!\!\{\mathcal{P}_B\}\!\!\}\text{”} \equiv$$

$$\{\mathcal{P}_A \equiv \{\mathcal{P}_A \mid \mathcal{P}_B\}\} \equiv \{\mathcal{P}_B;\ \forall\mathcal{P}_A\} \equiv \exists\underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\langle\mathcal{P}_B \,\vdots\, \mathcal{P}_A\rangle \equiv \text{“da } \mathcal{P}_A \text{ segue } \mathcal{P}_B\text{”} \equiv \text{“}\mathcal{P}_A \text{ porta } \mathcal{P}_B\text{”} \equiv \text{“}\mathcal{P}_A \text{ mostra } \mathcal{P}_B\text{”} \equiv \text{“}\mathcal{P}_A \text{ dà luogo a } \mathcal{P}_B\text{”} \equiv$$

$$\text{“}\mathcal{P}_A \text{ evidenzia } \mathcal{P}_B\text{”} \equiv \text{“}\mathcal{P}_A \text{ implica } \mathcal{P}_B\text{”} \equiv \text{“}\mathcal{P}_B \text{ è dovuta a } \mathcal{P}_A\text{”} \equiv \text{“}\mathcal{P}_B \text{ è ottenibile da } \mathcal{P}_A\text{”} \equiv \text{“}\mathcal{P}_B \text{ è una diretta conseguenza di } \mathcal{P}_A\text{”} \tag{3}$$

la cui $\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B \equiv$ "$\{\!\!\{\mathcal{P}_A\}\!\!\}$ è sufficiente per $\{\!\!\{\mathcal{P}_B\}\!\!\}$" $\equiv$ "$\{\!\!\{\mathcal{P}_B\}\!\!\}$ è necessaria per $\{\!\!\{\mathcal{P}_A\}\!\!\}$" è individuabile in [5], le cui parentesi "$\{\!\!\{$" e "$\}\!\!\}$" possono evidentemente essere eliminate senza rischio di equivoci, e che, in base a $\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B \equiv \mathcal{P}_A \Rightarrow \mathcal{P}_B$, include la tautologia $\mathcal{P}_A \Rightarrow \mathcal{P}_B \equiv \neg\mathcal{P}_B \Rightarrow \neg\mathcal{P}_A$ nota come *legge di contrapposizione* (una tautologia è una proposizione sempre vera comunque si cambino i suoi argomenti variabili).

Le (3) e (2) danno luogo a

$$\text{“}\mathcal{P}_A \text{ è necessaria e sufficiente per } \mathcal{P}_B\text{”} \equiv \text{“}\mathcal{P}_A \text{ se e solo se } \mathcal{P}_B\text{”} \equiv \text{“}\mathcal{P}_A \text{ equivale a } \mathcal{P}_B\text{”} \equiv \text{“}\mathcal{P}_A \text{ significa } \mathcal{P}_B\text{”} \equiv \{\mathcal{P}_A \equiv \mathcal{P}_B\} \tag{4}$$

i cui pedici sono scambiabili in ognuno dei quattro membri.

La (3) porta che $\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B$ e $\neg\{\mathcal{P}_B\}$ danno luogo a $\neg\{\mathcal{P}_A\}$, e quindi porta anche il tipo di argomentazione noto come *demonstratio per absurdum* e consistente nel dedurre $\{\mathcal{P}_A\}$ da $\neg\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B$ e $\neg\{\mathcal{P}_B\}$ o $\neg\{\mathcal{P}_A\}$ da $\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B$ e $\neg\{\mathcal{P}_B\}$ (e consistente quindi in definitiva nello stabilire falsa una $\mathcal{P}_A$ che implica una $\mathcal{P}_B$ falsa).

Is implicit

$$\text{Æ}\langle \mathrm{A} \,/\, \mathrm{B} \,/\, \mathrm{C}\rangle \equiv \{\text{the being A a specification of B of which C}\}$$

where “$/\mathrm{C}$” may be absent causing so the absence of “of which C”.

Si dice che B è una specificazione di A per intendere che B ha tutte le proprietà di A. Quindi, in base ai primi tre capoversi di questa sezione, $\mathrm{A_B}$ è una specificazione di A se questo nome ha un significato. Da: ciò; (2.1.1.3) di [1]; segue

$$\text{Æ}\langle \mathrm{A} \,/\, \mathrm{B}\rangle \equiv \{\mathrm{A} \equiv \{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}\}\} \equiv \{\mathrm{A} \underline{\rightarrow} \mathrm{B}\} \tag{5}$$

dove si intende che A è un nome che ha un significato.

In relazione ai seguenti concetti di insiemistica si fa riferimento a [1], [6], [7], [3], [8].

Intendendo $\{\text{ş}_i;\, i{=}1,\text{ɨ}\} \equiv \{\text{ş}_1,\text{ş}_2,\ldots\text{ş}_\text{ɨ}\} \equiv \wedge_{i=1,\text{ɨ}}(\text{ş}_i)$, una sequence e un insieme, costituiti entrambi da ɨ elementi, sono rispettivamente indicati $(\text{ş}_i;\, i{=}1,\text{ɨ})$ e $\{\text{ş}_i;\, i{=}1,\text{ɨ}\}$, e differiscono perché nel secondo caso è irrilevante l'ordine definito da $\{a<b\} \equiv \{\text{ş}_a \text{ precede } \text{ş}_b\}$ e detto sequenziale come quello tipicamente proprio di ogni sequenza. Perciò una sequenza è anche un insieme ma non viceversa. È indicato $\{\text{ş} \,/\, \mathcal{P}\}$ un insieme costituito da all the different specifications of ş contextually possible when there is the condition $\mathcal{P}$. È implicita $\{i{=}1,\text{ɨ}\} \equiv \{i;\, i{=}1,\text{ɨ}\}$.

Si intende $\mathfrak{N}\langle\underline{A}\rangle$ la numerosità dell'insieme $\underline{A}$ i.e. il numero degli elementi che costituiscono $\underline{A}$, $\text{€}\langle\underline{A}\rangle \equiv \{\text{ş} \mid \text{ş}\in\underline{A}\}$, $\neg\underline{A}$ l'insieme degli elementi che non appartengono a $\underline{A}$, $\varnothing$ l'insieme vuoto poiché $\mathfrak{N}\langle\varnothing\rangle = 0$, $\neg\varnothing$ l'insieme costituito da ogni elemento.

L'uguaglianza tra gli insiemi $\underline{A}$ e $\underline{B}$ è indicata $\underline{A}=\underline{B}$ e afferma che ogni elemento di $\underline{A}$ è anche un elemento di $\underline{B}$ e viceversa. L'addizione di $\underline{A}$ e $\underline{B}$ è l'insieme indicato $\underline{A}+\underline{B}$ e costituito da tutti gli elementi di $\underline{A}$ e tutti gli elementi di $\underline{B}$. L'intersezione di $\underline{A}$ e $\underline{B}$ è l'insieme indicato $\underline{A}\cap\underline{B}$ e costituito da ogni elemento che appartiene sia a $\underline{A}$ sia a $\underline{B}$. La differenza tra $\underline{A}$ e $\underline{B}$ è l'insieme indicato $\underline{A}-\underline{B}$ e costituito da ogni elemento di $\underline{A}$ che non appartiene anche a $\underline{B}$. L'unione di $\underline{A}$ e $\underline{B}$ è l'insieme indicato $\underline{A}\cup\underline{B}$ e costituito da ogni elemento che appartiene a $\underline{A}$ ma non a $\underline{A}\cap\underline{B}$, o a $\underline{B}$ ma non a $\underline{A}\cap\underline{B}$, o a $\underline{A}\cap\underline{B}$. Il prodotto cartesiano di $\underline{A}$ e $\underline{B}$ è l'insieme indicato $\underline{A}\cdot\underline{B}$ e costituito da ogni diversa coppia che può essere costituita scegliendone gli elementi rispettivamente appartenenti a $\underline{A}$ e $\underline{B}$.

Queste definizioni, intendendo $\underline{A} \equiv \{A_h;\, h{=}1,\text{ħ}\}$ e $\underline{B} \equiv \{B_k;\, k{=}1,\text{ꝁ}\}$, sono precisate da

$$\{\underline{A}=\underline{B}\} \equiv \{\mathbf{i}_{ABh}{=}1;\, h{=}1,\text{ħ}\} \wedge \{\mathbf{i}_{BAk}{=}1;\, k{=}1,\text{ꝁ}\} \qquad \underline{A}\cap\underline{B} \equiv \{\{A_h \mid \mathbf{i}_{ABh}{=}1\};\, h{=}1,\text{ħ}\} \qquad \underline{A}-\underline{B} \equiv \{\{A_h \mid \mathbf{i}_{ABh}{=}0\};\, h{=}1,\text{ħ}\}$$

$$\underline{A}\cup\underline{B} \equiv \{\underline{A}+\underline{B}\} - \{\underline{A}\cap\underline{B}\} \tag{6}$$

il cui $\{\mathbf{i}_{ABh};\, h{=}1,\text{ħ}\}$ è determinato con i seguenti passi (e analogamente $\{\mathbf{i}_{BAk};\, k{=}1,\text{ꝁ}\}$):

- si pone $\{\mathbf{i}_{ABh}=0;\, h{=}1,\text{ħ}\}$;
- si effettuano le $\mathfrak{N}\langle\underline{B}\rangle$ iterazioni indicate da $\{k{=}1,\text{ꝁ}\}$;
- nella k-esima iterazione si cerca una $h\in\{h{=}1,\text{ħ}\}$ che verifichi le $\{\mathbf{i}_{ABh}=0, A_h\equiv B_k\}$ e si pone $\mathbf{i}_{ABh}=1$ se si trova una tale $\{h\in\{h;\, h{=}1,\text{ħ}\} \mid \mathbf{i}_{ABh}=0, A_h\equiv B_k\}$.

Una $\underline{A}\cap\underline{B}\neq\varnothing$ implica che almeno uno dei due insiemi $\{\underline{A},\underline{B}\}$ è l'addizione di un sottoinsieme i cui elementi sono anche elementi dell'altro insieme e di un altro sottoinsieme che non ha questa proprietà. Essendo quindi tale addizione e $\underline{A}\cap\underline{B}\neq\varnothing$ rispettive specificazioni delle $\mathcal{P}_B$ e $\mathcal{P}_A$ in (3), si ha una *demonstratio per absurdum* di $\underline{A}\cap\underline{B}=\varnothing$ se l'addizione in oggetto deve essere ritenuta falsa poiché è ingiustificabile l'inerente distinzione tra elementi di uno stesso insieme.

Si ha

$$\{\underline{A}\subseteq\underline{B}\} \equiv \{\underline{A}=\underline{A}\cap\underline{B}\} \equiv \{\underline{B}=\underline{A}\cup\underline{B}\} \tag{7}$$

Una permutazione di N elementi è una delle loro diverse N! possibili sequenze. Intendendo

$$\square_{i=1,\text{ɨ}}(\text{ş}_i) \equiv \text{ş}_1 \,\square\, \text{ş}_2 \,\square\, \ldots \,\square\, \text{ş}_\text{ɨ} \qquad \{\square,\square\} \equiv \{\{\Sigma,+\} \,\dot\vee\, \{\Pi,\cdot\} \,\dot\vee\, \{\wedge,\wedge\} \,\dot\vee\, \{\vee,\vee\} \,\dot\vee\, \{\dot\vee,\dot\vee\} \,\dot\vee\, \{\cap,\cap\} \,\dot\vee\, \{\cup,\cup\} \,\dot\vee\, \{\dot\cup,\dot\cup\}\}$$

$\square_{i=1,\text{ɨ}}(\text{ş}_i)$ ha le proprietà commutativa (i.e. $\square_{i=1,\text{ɨ}}(\text{ş}_i) \equiv \square_{i=1,\text{ɨ}}(\text{ş}_{P\langle i\rangle})$ con $(P_i;\, i{=}1,\text{ɨ})$ una qualsiasi tra le ɨ! permutazioni di $(i{=}1,\text{ɨ})$) e associativa, con esclusione del caso $\{\square,\square\}\equiv\{\Pi,\cdot\}$ che ha la sola associatività se ogni ş_i è un insieme.

Le leggi di De Morgan in logica proposizionale e insiemistica sono

$$\neg\vee_{k=1,\text{ꝁ}}(\text{ş}_k) \equiv \wedge_{k=1,\text{ꝁ}}(\neg\text{ş}_k) \qquad \neg\wedge_{k=1,\text{ꝁ}}(\text{ş}_k) \equiv \vee_{k=1,\text{ꝁ}}(\neg\text{ş}_k) \qquad \neg\cup_{k=1,\text{ꝁ}}(\underline{A}_k) = \cap_{k=1,\text{ꝁ}}(\neg\underline{A}_k) \qquad \neg\cap_{k=1,\text{ꝁ}}(\underline{A}_k) = \cup_{k=1,\text{ꝁ}}(\neg\underline{A}_k) \tag{8}$$

I simboli "$\dot{\vee}$" e "$\dot{\cup}$" sono specificazioni dei rispettivi "$\vee$" e "$\cup$". Le Æ$\langle\dot{\vee}\,/\,\vee\rangle$, (5) e prime due di (8) danno luogo alle prime due di

$$\neg\dot{\vee}_{k=1,\cancel{k}}(\text{ş}_k) \underline{\rightarrow} \wedge_{k=1,\cancel{k}}(\neg\text{ş}_k) \qquad \dot{\vee}_{k=1,\cancel{k}}(\neg\text{ş}_k) \underline{\rightarrow} \neg\wedge_{k=1,\cancel{k}}(\text{ş}_k) \qquad \neg\dot{\cup}_{k=1,\cancel{k}}(\text{ş}_k) \underline{\rightarrow} \cap_{k=1,\cancel{k}}(\neg\text{ş}_k) \qquad \dot{\cup}_{k=1,\cancel{k}}(\neg\text{ş}_k) \underline{\rightarrow} \neg\cap_{k=1,\cancel{k}}(\text{ş}_k) \quad (9)$$

le cui seconde due si deducono nel modo evidentemente analogo. Le $\neg\text{ş} \equiv \mathit{ş}$ e $\text{ş} \equiv \neg\mathit{ş}$ evidenziano come in ognuna delle (8) e (9) $\{\text{ş}_k,\neg\text{ş}_k\}$ possa essere sostituita da $\{\neg\text{ş}_k,\text{ş}_k\}$.

Essendo i $\{\underline{A}_k;\, k=1,\cancel{k}\}$ $\cancel{k}$ insiemi, si ha $\cap_{k=1,\cancel{k}}(\underline{A}_k) \subseteq \cup_{k=1,\cancel{k}}(\underline{A}_k)$, $\bowtie_{k=1,\cancel{k}}(\underline{A}) \equiv \underline{A}$ di cui $\bowtie \equiv \cap \mathbin{\dot{\vee}} \cup$, $\dot{\cup}_{k=1,\cancel{k}}(\underline{A}_k)$ una $\cup_{k=1,\cancel{k}}(\underline{A}_k)$ di cui $\{\underline{A}_a \cap \underline{A}_b = \varnothing;\, \forall\{a,b\} \subseteq \{k=1,\cancel{k}\}\}$.

Da: (7); $\{\underline{A} = \underline{B}\} \equiv \{\neg\underline{A} = \neg\underline{B}\}$; quarta di (8); (7); segue

$$\{\underline{A} \subseteq \underline{B}\} \equiv \{\underline{A} = \underline{A} \cap \underline{B}\} \equiv \{\neg\underline{A} = \neg\{\underline{A} \cap \underline{B}\}\} \equiv \{\neg\underline{A} = \{\neg\underline{A} \cup \neg\underline{B}\}\} \equiv \{\neg\underline{B} \subseteq \neg\underline{A}\} \quad (10)$$

Nel seguito sono trattate (con riferimento a [9] e [10]) disposizioni, permutazioni e combinazioni "semplici" i.e. "senza ripetizione". Una disposizione di classe K di N oggetti è una sequenza di K elementi di un insieme costituito da N elementi, quindi due disposizioni possono anche differire solo per i rispettivi ordini sequenziali. Invece una combinazione di classe K di N oggetti è un sottoinsieme di numerosità K di un insieme di numerosità N, quindi l'ordine sequenziale degli elementi di una combinazione è irrilevante come nel caso degli insiemi. Una disposizione di classe N di N oggetti è chiamata anche permutazione, e una disposizione di classe K di N oggetti è chiamata anche permutazione di N oggetti presi K alla volta. Il rispettivo numero di tutte le possibili diverse disposizioni e combinazioni di classe K di N oggetti è $\mathrm{N}!/(\mathrm{N}-\mathrm{K})!$ e Б$\langle \mathrm{N},\mathrm{K}\rangle$ con il secondo che è il noto coefficiente binomiale di cui Б$\langle \mathrm{N},\mathrm{K}\rangle \equiv \mathrm{N}!\,/\,((\mathrm{N}-\mathrm{K})!\cdot\mathrm{K}!)$).

Chiamando $\underline{k}\langle c,b,a\rangle$ il a-esimo elemento della b-esima diversa combinazione di classe c dei $\{k=1,\cancel{k}\}$, si ha

$$\{\{\underline{k}_{cba};\, a=1,c\};\, b=1,\text{Б}\langle\cancel{k},c\rangle\} \Leftrightarrow \{\{k=1,\cancel{k}\} - \{\underline{k}_{cba};\, a=1,c\};\, b=1,\text{Б}\langle\cancel{k},c\rangle\} \equiv \{\{\underline{\mathit{k}}_{cba};\, a=1,\cancel{k}-c\};\, b=1,\text{Б}\langle\cancel{k},\cancel{k}-c\rangle\} \quad (11)$$

Le (2.2.36) e (2.2.37) di [1] affermano le rispettive

$$\mathfrak{N}\langle\cup_{k=1,\cancel{k}}(\underline{A}_k)\rangle = \Sigma_{c=1,\cancel{k}}((-1)^{c+1}\cdot\Sigma_{b=1,\text{Б}\langle\cancel{k},c\rangle}(\mathfrak{N}\langle\cap_{a=1,c}(\underline{A}_{\underline{k}\langle c,b,a\rangle})\rangle)) \qquad \mathfrak{N}\langle\dot{\cup}_{k=1,\cancel{k}}(\underline{A}_k)\rangle = \Sigma_{k=1,\cancel{k}}(\mathfrak{N}\langle\underline{A}_k\rangle) \quad (12)$$

La $\bowtie_{k=1,\cancel{k}}(\underline{A}) \equiv \underline{A}$ porta $\mathfrak{N}\langle\bowtie_{k=1,\cancel{k}}(\underline{A})\rangle = \mathfrak{N}_{\underline{A}}$ che è coerente con prima di (12) e il verificare $\Sigma_{c=1,\cancel{k}}((-1)^{c+1}\cdot\Sigma_{b=1,\text{Б}\langle\cancel{k},c\rangle}(1)) = \Sigma_{c=1,\cancel{k}}((-1)^{c+1}\cdot\text{Б}\langle\cancel{k},c\rangle) = 1$.

Inerentemente i $\cancel{h}\cdot\cancel{k}$ insiemi $\{\underline{\mathbb{A}}_{hk};\, h=1,\cancel{h};\, k=1,\cancel{k}\}$, nella sezione 2.2 di [1] si hanno $\cap_{h=1,\cancel{h}}(\Pi_{k=1,\cancel{k}}(\underline{\mathbb{A}}_{hk})) \supseteq \Pi_{k=1,\cancel{k}}(\cap_{h=1,\cancel{h}}(\underline{\mathbb{A}}_{hk}))$ e (2.2.30) i.e.

$$\neg\exists\{\{\text{ş}\,/\,\text{ş} \equiv \mathit{ş};\, \text{ş}\in\underline{\mathbb{A}}_{ac}\} \neq \{\text{ş}\,/\,\text{ş} \equiv \mathit{ş};\, \text{ş}\in\underline{\mathbb{A}}_{bc}\};\, \mathit{ş}\in\underline{\mathbb{A}}_{ac};\, \mathit{ş}\in\underline{\mathbb{A}}_{bc};\, \{a,b\} \subseteq \{h=1,\cancel{h}\};\, c\in\{k=1,\cancel{k}\}\} \underline{\rightarrow}$$

$$\{\cap_{h=1,\cancel{h}}(\Pi_{k=1,\cancel{k}}(\underline{\mathbb{A}}_{hk})) = \Pi_{k=1,\cancel{k}}(\cap_{h=1,\cancel{h}}(\underline{\mathbb{A}}_{hk}))\} \quad (13)$$

le quali possono risultare entrambe da verifiche al computer se ogni $\underline{\mathbb{A}}_{hk}$ è un insieme finito, mentre la (13) può risultare rappresentando i prodotti come parallelepipedi rettangolari $\cancel{k}$-dimensionali se ogni $\underline{\mathbb{A}}_{hk}$ è un intervallo di numeri reali.

Una corrispondenza univoca tra $\underline{A}$ e $\underline{B}$ è un insieme di $\mathfrak{N}_{\underline{A}}$ coppie indicato $\underline{A} \Rightarrow \underline{B}$ e definito da una $\underline{A} \Rightarrow \underline{B} \equiv \{A_h,B_{\mathit{k}\langle h\rangle};\, h=1,\cancel{h}\}$ di cui $\{\mathit{k}_h\in\{k=1,\cancel{k}\};\, h=1,\cancel{h}\}$, $\{k\in\{\mathit{k}_h;\, h=1,\cancel{h}\};\, k=1,\cancel{k}\}$. Perciò una $\underline{A} \Rightarrow \underline{B}$ fa corrispondere a ogni €$\langle\underline{A}\rangle$ un solo €$\langle\underline{B}\rangle$ e in tali coppie compaiono tutti gli elementi di $\underline{A}$ e $\underline{B}$.

Una corrispondenza biunivoca tra $\underline{A}$ e $\underline{B}$ di cui $\mathfrak{N}_{\underline{A}} = \mathfrak{N}_{\underline{B}}$, è un insieme di $\mathfrak{N}_{\underline{A}}$ coppie indicato $\underline{A} \Leftrightarrow \underline{B}$ e definito da una $\underline{A} \Leftrightarrow \underline{B} \equiv \{A_h,B_{\mathit{k}\langle h\rangle};\, h=1,\cancel{h}\}$ di cui $\{\mathit{k}_h;\, h=1,\cancel{h}\} = \{k=1,\cancel{k}\}$. Quindi una tale $\underline{A} \Leftrightarrow \underline{B}$ fa corrispondere a ogni €$\langle\underline{A}\rangle$ un solo €$\langle\underline{B}\rangle$ e viceversa.

2 EVENTI E PROBABILITÀ

Per i seguenti concetti di probabilità e statistica si fa riferimento a [1], [11], [12], [6], [13], [14], [15], [7], [16], [17]. Questa sezione compendia, semplifica e integra la sezione 3 di [1] per gli scopi attuali.

Un evento E è associato biunivocamente al suo insieme di modalità $\underline{\mathbb{M}}\langle\mathrm{E}\rangle$ i cui elementi sono tutte le diverse modalità con cui E può accadere ossia tutte le diverse possibilità che E ha di accadere. Si sottolinea il nome di un evento, con esclusione di pedici e prefisso "$\neg$", per indicare il suo insieme di modalità, nel senso di $\underline{\mathrm{E}} \equiv \underline{\mathbb{M}}_{\mathrm{E}}$ e $\neg\underline{\mathrm{E}}_{\mathrm{A}} \equiv \underline{\mathbb{M}}\langle\neg\mathrm{E}_{\mathrm{A}}\rangle$. Gli elementi di $\underline{\mathrm{E}}$ sono modalità mutuamente esclusive di un solo accadimento: un E accade con (i.e. "come") un solo €$\langle\underline{\mathrm{E}}\rangle$ che è indicato $\mathbb{M}\langle\mathrm{E}\rangle$ e questa proprietà è chiamata "unicità di $\mathbb{M}_{\mathrm{E}}$". Un €$\langle\underline{\mathrm{E}}\rangle$ può essere considerato come un insieme di modalità che ha un solo elemento e che è quindi proprio dell'evento costituito dall'accadere di tale elemento.

L'evento $\neg$E accade se E non accade ma poteva accadere, $\mathrm{E}_\varnothing$ è l'evento impossibile poiché $\underline{\mathrm{E}}_\varnothing = \varnothing$.

Un nome di un evento significa anche il suo accadere che a sua volta ne significa la verità intesa come alternativa alla falsità costituita dal suo non accadere. Perciò si intende E ≡ "l'accadere di E" ≡ $\{\mathrm{E}\}$.

Per due eventi A e B si ha $\{\underline{\mathrm{A}} = \underline{\mathrm{B}}\} \equiv \{\mathrm{A} \equiv \mathrm{B}\}$. Una $\mathrm{A} \not\equiv \mathrm{B}$ ha come condizione sufficiente l'accadere di A e B in luoghi o tempi diversi e, se è dovuta unicamente a una tale condizione, A e B sono due diversi accadimenti di uno stesso evento.

Una $\mathrm{A} \twoheadrightarrow \mathrm{B}$ afferma che l'accadere di A implica l'accadere di B ed è una corrispondenza univoca tra $\underline{\mathrm{A}}$ e un sottoinsieme di $\underline{\mathrm{B}}$, costituita da coppie tali che le proprietà del primo elemento sono concordi nell'affermare che il suo accadere implica l'accadere del secondo. Pertanto $\mathsf{A} \twoheadrightarrow \mathsf{B}$ significa che l'accadere di ogni $€\langle\underline{\mathsf{A}}\rangle$ porta l'accadere di un solo $€\langle\underline{\mathsf{B}}\rangle$ essendo tali $€\langle\underline{\mathsf{A}}\rangle$ e $€\langle\underline{\mathsf{B}}\rangle$ gli elementi rispettivamente primo e secondo di una delle dette coppie, si ha

$$\{\mathsf{A} \twoheadrightarrow \mathsf{B}\} \equiv \{\{\underline{\mathsf{A}} \Rightarrow \underline{\mathsf{b}}\}_{\twoheadrightarrow} \,|\, \underline{\mathsf{b}} \subseteq \underline{\mathsf{B}}\} \tag{14}$$

dove il pedice "$\twoheadrightarrow$" indica una corrispondenza univoca del particolare tipo testé detto, ed è quindi evidente come per l'esistenza di $\mathsf{A} \twoheadrightarrow \mathsf{B}$ non è sufficiente il solo fatto che quando accade A accade anche B.

Generalmente un nome di una proposizione non significa anche l'accadere dell'evento consistente nell'essere vera tale proposizione. Invece un nome di un evento ne significa sempre anche l'accadere e la "verità" nel senso della detta $\mathsf{E} \equiv$ "l'accadere di E" $\equiv \{\mathsf{E}\}$. Coerentemente con ciò e l'anzidetta $\mathcal{P}_{\mathsf{A}} \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_{\mathsf{B}} \equiv \mathcal{P}_{\mathsf{A}} \twoheadrightarrow \mathcal{P}_{\mathsf{B}}$, è implicito che una $\mathcal{P}_{\mathsf{A}} \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_{\mathsf{B}}$ è specificabile come $\mathsf{A} \twoheadrightarrow \mathsf{B}$.

Pertanto in particolare (5) porta $\{\mathsf{A} \twoheadrightarrow \mathsf{B}\} \equiv Æ\langle \mathsf{A} / \mathsf{B}\rangle$.

La (14) e $\mathsf{A} \leftrightarrow \mathsf{B}$ implicano $\mathsf{a}_1 \twoheadrightarrow b$ e $b \twoheadrightarrow \mathsf{a}_2$ di cui $\mathsf{a}_1 \in \underline{\mathsf{A}}$, $b \in \underline{\mathsf{B}}$, $\mathsf{a}_2 \in \underline{\mathsf{A}}$ (e $\mathfrak{N}\langle\underline{\mathbb{M}}\langle\mathsf{a}_1\rangle\rangle = \mathfrak{N}\langle\underline{b}\rangle = \mathfrak{N}\langle\underline{\mathsf{a}_2}\rangle = 1$). L'unicità di $\mathbb{M}\langle\mathsf{A}\rangle$ e tale essere a_2 implicato da a_1 mostrano che a_1 e a_2 sono uno stesso $€\langle\underline{\mathsf{A}}\rangle$ i.e. $\mathsf{a}_1 \equiv \mathsf{a}_2 \equiv \mathbb{M}_{\mathsf{A}}$, conseguendo quindi una $\{\mathsf{A} \leftrightarrow \mathsf{B}\} \equiv \{\underline{\mathsf{A}} \Leftrightarrow \underline{\mathsf{B}}\}_{\leftrightarrow}$ il cui secondo membro è una corrispondenza biunivoca costituita da coppie tali che le proprietà dei due elementi sono concordi nell'affermare che l'accadere di uno implica l'accadere dell'altro.

La (7) evidenzia come $\underline{\mathsf{A}} \subseteq \underline{\mathsf{B}}$ porta che A accade come un $€\langle\underline{\mathsf{A}} \cap \underline{\mathsf{B}}\rangle$, e quindi coerentemente con seconda di (6) evidenzia i primi due membri di

$$\{\underline{\mathsf{A}} \subseteq \underline{\mathsf{B}}\} \underline{\rightarrow} \{\mathbb{M}\langle\mathsf{A}\rangle \equiv \{\mathbb{M}\langle\mathsf{A}\rangle \,|\, \mathbb{M}\langle\mathsf{A}\rangle \equiv \mathbb{M}\langle\mathsf{B}\rangle\}\} \underline{\rightarrow} \{\mathsf{A} \twoheadrightarrow \mathsf{B}\} \tag{15}$$

Da: questa; unicità di $\mathbb{M}_{\mathsf{E}}$ (per cui $\mathbb{M}_{\mathsf{E}}$ è in ambedue i casi una stessa modalità); (15) e (2); segue

$$\{\underline{\mathsf{A}} \subseteq \underline{\mathsf{E}}, \underline{\mathsf{B}} \subseteq \underline{\mathsf{E}}\} \underline{\rightarrow} \{\{\mathbb{M}\langle\mathsf{A}\rangle \equiv \{\mathbb{M}\langle\mathsf{A}\rangle \,|\, \mathbb{M}\langle\mathsf{A}\rangle \equiv \mathbb{M}\langle\mathsf{E}\rangle\}, \{\mathbb{M}\langle\mathsf{B}\rangle \equiv \{\mathbb{M}\langle\mathsf{B}\rangle \,|\, \mathbb{M}\langle\mathsf{B}\rangle \equiv \mathbb{M}\langle\mathsf{E}\rangle\}\} \underline{\rightarrow} \{\{\mathsf{A} \twoheadrightarrow \mathsf{B}\} \underline{\rightarrow} \{\underline{\mathsf{A}} \subseteq \underline{\mathsf{B}}\}\} \equiv$$

$$\{\{\mathsf{A} \twoheadrightarrow \mathsf{B}\} \equiv \{\underline{\mathsf{A}} \subseteq \underline{\mathsf{B}}\}\} \tag{16}$$

Da (2) segue $\{\mathsf{A} \leftrightarrow \mathsf{B}\} \equiv \{\mathsf{A} \equiv \mathsf{B}\}$ che, per $\{\mathsf{A} \equiv \mathsf{B}\} \equiv \{\underline{\mathsf{A}} = \underline{\mathsf{B}}\}$ e $\{\mathsf{A} \leftrightarrow \mathsf{B}\} \equiv \{\underline{\mathsf{A}} \Leftrightarrow \underline{\mathsf{B}}\}_{\leftrightarrow}$, dà luogo a $\{\underline{\mathsf{A}} = \underline{\mathsf{B}}\} \equiv \{\underline{\mathsf{A}} \Leftrightarrow \underline{\mathsf{B}}\}_{\leftrightarrow}$. Questa è confermata da prima delle (6) e dalle dette proprietà di $\{\underline{\mathsf{A}} \Leftrightarrow \underline{\mathsf{B}}\}_{\leftrightarrow}$ che consentono di considerarne ogni coppia come costituita da due nomi di uno stesso oggetto.

Si pone

$$\mathcal{B}\langle\mathsf{E}\rangle \equiv \text{“}\mathsf{E} \text{ è un evento certo”} \equiv \text{“}\mathsf{E} \text{ accade certamente”} \equiv \text{“}\mathsf{E} \text{ è accaduto o accadrà”} \underline{\rightarrow} \text{“è nota almeno una definizione } \mathsf{E}\text{”} \tag{17}$$

e riguardo il suo ultimo membro si nota che l'ignorare, volontariamente o involontariamente, un evento è una mera limitazione di conoscenza e non un errore logico che potrebbe rendere inaffidabili i risultati.

In relazione a $\cancel{k}$ eventi $\{\mathsf{e}_k; k=1,\cancel{k}\}$, $\mathbb{I}\langle\mathsf{e}_k; k=1,\cancel{k}\rangle$ significa che tali eventi sono indipendenti ossia che l'insieme di modalità di ognuno di essi non è modificato dall'accadere di qualcuno degli altri.

In base ai primi due membri di (16) e unicità di $\mathbb{M}_{\mathsf{E}}$, una $\{\underline{\mathsf{A}} \subseteq \underline{\mathsf{E}}, \underline{\mathsf{B}} \subseteq \underline{\mathsf{E}}\}$ implica che, se accade A, B può accadere solo con un $\mathbb{M}\langle\mathsf{B}\rangle$ che verifica $\mathbb{M}\langle\mathsf{B}\rangle \equiv \{\mathbb{M}\langle\mathsf{B}\rangle \,|\, \mathbb{M}\langle\mathsf{B}\rangle \equiv \mathbb{M}\langle\mathsf{A}\rangle\}$ e perciò si ha $\{\underline{\mathsf{A}} \subseteq \underline{\mathsf{E}}, \underline{\mathsf{B}} \subseteq \underline{\mathsf{E}}\} \underline{\rightarrow} \neg\mathbb{I}\langle\mathsf{A},\mathsf{B}\rangle$. È inoltre evidente $\mathbb{I}\langle\mathsf{A},\mathsf{B}\rangle \underline{\rightarrow} \{\mathbb{I}\langle\mathsf{a},\mathsf{b}\rangle \,|\, \underline{\mathsf{a}} \subseteq \underline{\mathsf{A}}, \underline{\mathsf{b}} \subseteq \underline{\mathsf{B}}\}$. Pertanto si ha

$$\{\mathcal{B}\langle\mathsf{E}\rangle \wedge \exists\{\underline{\mathsf{A}} \subseteq \underline{\mathsf{E}}, \underline{\mathsf{B}} \subseteq \underline{\mathsf{E}} \,|\, \{\mathsf{A},\mathsf{B}\} \subseteq \{\mathsf{e}_k; k=1,\cancel{k}\}\}\} \underline{\rightarrow} \neg\mathbb{I}\langle\mathsf{e}_k; k=1,\cancel{k}\rangle \qquad \mathbb{I}\langle\mathsf{e}_k; k=1,\cancel{k}\rangle \underline{\rightarrow} \{\mathbb{I}\langle e_k; k=1,\cancel{k}\rangle \,|\, \underline{e}_k \subseteq \underline{\mathsf{e}}_k; k=1,\cancel{k}\}$$

$$\mathbb{I}\langle\mathsf{A},\mathsf{B}\rangle \underline{\rightarrow} \neg\{\mathsf{A} \twoheadrightarrow \mathsf{B}\} \tag{18}$$

per cui (in base a (3)) una $\mathbb{I}\langle\mathsf{e}_k; k=1,\cancel{k}\rangle$ esiste solo se si ignora ogni E che rende vero il primo membro di prima di (18).

Una $\mathsf{A} \twoheadrightarrow \mathsf{B}$ afferma, come detto in occasione di (14), che l'accadere di A implica l'accadere di un solo $€\langle\underline{\mathsf{B}}\rangle$. Ciò evidenzia $\{\mathsf{A} \twoheadrightarrow \mathsf{B}\} \underline{\rightarrow} \neg\mathbb{I}\langle\mathsf{A},\mathsf{B}\rangle$ da cui si deduce, per (3), $\mathbb{I}\langle\mathsf{A},\mathsf{B}\rangle \underline{\rightarrow} \neg\{\mathsf{A} \twoheadrightarrow \mathsf{B}\}$ e $\mathbb{I}\langle\mathsf{A},\mathsf{B}\rangle \underline{\rightarrow} \neg\{\mathsf{B} \twoheadrightarrow \mathsf{A}\}$, e quindi che il primo membro di (19) implica il secondo. Essendo inoltre subito evidente l'implicazione inversa, si ha

$$\mathbb{I}\langle\mathsf{A},\mathsf{B}\rangle \equiv \neg\{\mathsf{A} \twoheadrightarrow \mathsf{B}\} \wedge \neg\{\mathsf{B} \twoheadrightarrow \mathsf{A}\} \tag{19}$$

2.1 Eventi composti

Sono eventi composti $\mathsf{E}_\cap$, $\mathsf{E}_\cup$, $\mathsf{E}_{\dot\cup}$, $\mathsf{E}_{\bowtie}$, $\mathsf{E}_\wedge$ e $\mathsf{E}_\vee$ di cui $\mathsf{E}_\cap \equiv \cap_{k=1,\cancel{k}}(\mathsf{e}_k)$, $\mathsf{E}_\cup \equiv \cup_{k=1,\cancel{k}}(\mathsf{e}_k)$, $\mathsf{E}_{\dot\cup} \equiv \dot\cup_{k=1,\cancel{k}}(\mathsf{e}_k) \equiv \{\mathsf{E}_\cup \,|\, \underline{\mathsf{e}}_a \cap \underline{\mathsf{e}}_b = \varnothing; \forall a \neq b\}$, $\mathsf{E}_{\bowtie} \equiv \bowtie_{k=1,\cancel{k}}(\mathsf{e}_k)$, $\mathsf{E}_\wedge \equiv \wedge_{k=1,\cancel{k}}(\mathsf{e}_k)$ e $\mathsf{E}_\vee \equiv \vee_{k=1,\cancel{k}}(\mathsf{e}_k)$.

$\mathsf{E}_\cap$ e $\mathsf{E}_\wedge$ significano entrambi l'accadere di tutti i $\{\mathsf{e}_k; k=1,\cancel{k}\}$. $\mathsf{E}_\cup$ e $\mathsf{E}_\vee$ significano entrambi l'accadere di almeno uno dei $\{\mathsf{e}_k; k=1,\cancel{k}\}$. Tuttavia questi quattro eventi differiscono in quanto i loro insiemi di modalità sono

$$\underline{\mathsf{E}}_{\bowtie} \equiv \bowtie_{k=1,\cancel{k}}(\underline{\mathsf{e}}_k) \qquad \underline{\mathsf{E}}_\wedge \equiv \{(e_k; k=1,\cancel{k}) / e_k \in \underline{\mathsf{e}}_k; k=1,\cancel{k}\} \qquad \underline{\mathsf{E}}_\vee \equiv \{\vee_{k=1,\cancel{k}}(e_k) / e_k \in \underline{\mathsf{e}}_k; k=1,\cancel{k}\} \tag{20}$$

avendo perciò, in particolare e con riferimento a (17), $\mathcal{B}\langle \mathsf{E}_\wedge\rangle \equiv \wedge_{k=1,\cancel{k}}(\mathcal{B}\langle \mathsf{e}_k\rangle)$.

Un $\mathsf{E}_{\boxtimes}$, di cui $\mathsf{E}_{\boxtimes} \neq \mathsf{E}_\varnothing$, è definito solo se $\exists\{\mathsf{E}\,|\,\underline{\mathsf{E}} \subseteq \underline{\mathsf{e}}_k;\ k=1,\cancel{k}\}$, poiché viceversa gli elementi di $\underline{\mathsf{E}}_{\boxtimes}$ non sarebbero modalità mutuamente esclusive di un solo accadimento e verrebbe meno l'unicità di $\mathbb{M}\langle \mathsf{E}_{\boxtimes}\rangle$. Un esempio dell'assenza di questa necessaria condizione è ottenibile con $\mathsf{e}_1 \equiv \wedge_{k=2,\cancel{k}}(\mathsf{e}_k)$, quando essa (i.e. $\exists\{\mathsf{E}\,|\,\underline{\mathsf{E}} \subseteq \underline{\mathsf{e}}_k;\ k=1,\cancel{k}\}$) non sarebbe impedita da $\{\mathsf{e}_k \cap \mathsf{e}_1 \equiv \mathsf{E}_\varnothing;\ k=2,\cancel{k}\}$ ma dal fatto che implicherebbe relazioni del tipo $\mathbb{C}\langle \underline{\mathsf{E}}\rangle \equiv \mathbb{C}\langle \underline{\mathsf{e}}_1\rangle \equiv \mathbb{C}\langle \neg\underline{\mathsf{e}}_k\rangle$ con $k \neq 1$ e quindi con un tale $\mathbb{C}\langle \underline{\mathsf{E}}\rangle$ che sarebbe impossibile poiché e_1 e $\neg\mathsf{e}_k$ non possono accadere insieme.

La prima di (20) porta $\underline{\mathsf{e}}_k \subseteq \mathsf{E}_{\boxtimes}$ e quindi, in base a prima di (18), mostra che il solo considerare $\underline{\mathsf{E}}_{\boxtimes}$ dà in ogni caso luogo a $\neg\mathbb{I}\langle \mathsf{e}_k;\ k=1,\cancel{k}\rangle$.

La $\underline{\mathsf{E}}_{\dot\cup} \equiv \dot\cup_{k=1,\cancel{k}}(\underline{\mathsf{e}}_k)$ (dovuta a prima di (20)) e l'unicità di ogni $\mathbb{M}_{\mathsf{E}}$ implicano sia che i $\{\mathsf{e}_k;\ k=1,\cancel{k}\}$ sono mutuamente esclusivi quando si considera $\mathsf{E}_{\dot\cup}$, sia la $\mathsf{E}_\cup \equiv \mathsf{E}_{\dot\cup}$ di $\{\mathsf{e}_k;\ k=1,\cancel{k}\}$ mutuamente esclusivi.

Da una $\mathcal{E}_1$, di cui $\mathcal{E}_1 \equiv \{\underline{\mathsf{e}}_k \subseteq \underline{\mathsf{E}}, \mathsf{e}_k \rightarrow \mathsf{A};\ k=1,\cancel{k}\}$, non è immediatamente deducibile $\mathsf{E}_\cup \rightarrow \mathsf{A}$, poiché alle proprietà di un $\mathbb{C}\langle \underline{\mathsf{e}}_a\rangle$ che contribuiscono a determinare una $\mathsf{e}_a \rightarrow \mathsf{A}$ quando non si considera un e_b, quando invece si considera anche e_b se ne possono aggiungere altre che le contraddicono (questa possibilità sarà evidenziata dall'esempio in sezione 3.1). Quindi, avendo in ogni caso $\mathsf{E}_\cap \rightarrow \mathsf{E}_\cup$ (dovuta a $\underline{\mathsf{E}}_\cap \subseteq \underline{\mathsf{E}}_\cup$ e (15)) e intendendo $\mathcal{E}_2 \equiv \neg\exists\{\underline{\mathsf{e}} \cup \underline{\mathsf{E}}_\cup \neq \underline{\mathsf{E}}_\cup\,|\,\mathsf{e} \rightarrow \mathsf{A}\}$, si ha la prima delle

$$\{\mathcal{E}_1 \underline{\rightarrow} \{\mathsf{E}_\cap \rightarrow \mathsf{E}_\cup \rightarrow \mathsf{A}\}\} \underline{\rightarrow} \mathcal{E}_3 \qquad \{\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{B}\langle \mathsf{E}\rangle\} \underline{\rightarrow} \{\mathsf{E}_\cup \equiv \mathsf{A}\}\} \underline{\rightarrow} \mathcal{E}_3 \tag{21}$$

dove $\mathcal{E}_3$ (che è necessaria analogamente alla $\mathcal{P}_{\mathrm{B}}$ di (3)) consiste nell'essere le proprietà di ogni $\mathbb{C}\langle \underline{\mathsf{E}}_\cup\rangle$, che sono determinate dal considerare tutti i $\{\mathsf{e}_k;\ k=1,\cancel{k}\}$, tutte concordi nell'implicare un $\mathbb{C}\langle \underline{\mathsf{A}}\rangle$, ossia nell'essere i nomi di ogni $\mathbb{C}\langle \underline{\mathsf{E}}_\cup\rangle$ coerenti nel determinare tale implicazione; ed è inoltre evidente che la seconda segue dalla prima in quanto in questa $\mathsf{E}_\cup \rightarrow \mathsf{A}$ può esservi sostituita da $\mathsf{E}_\cup \equiv \mathsf{A}$ se $\mathcal{E}_2$ impedisce di aumentare $\mathfrak{N}\langle \underline{\mathsf{E}}_\cup\rangle$ e $\mathcal{B}\langle \mathsf{E}\rangle$.

La sola $\mathsf{E}_\wedge \equiv \wedge_{k=1,\cancel{k}}(\mathsf{e}_k)$ fa dedurre, coerentemente a $\mathfrak{N}\langle \Pi_{k=1,\cancel{k}}(\underline{\mathsf{A}}_k)\rangle = \Pi_{k=1,\cancel{k}}(\mathfrak{N}\langle \underline{\mathsf{A}}_k\rangle)$ in (2.2.29) di [1],

$$\mathbb{I}\langle \mathsf{e}_k;\ k=1,\cancel{k}\rangle \equiv \{\underline{\mathsf{E}}_\wedge = \Pi_{k=1,\cancel{k}}(\underline{\mathsf{e}}_k)\} \equiv \{\mathfrak{N}\langle \underline{\mathsf{E}}_\wedge\rangle = \Pi_{k=1,\cancel{k}}(\mathfrak{N}\langle \underline{\mathsf{e}}_k\rangle)\} \qquad \neg\mathbb{I}\langle \mathsf{e}_k;\ k=1,\cancel{k}\rangle \equiv \{\underline{\mathsf{E}}_\wedge \subset \Pi_{k=1,\cancel{k}}(\underline{\mathsf{e}}_k)\} \equiv \{\mathfrak{N}\langle \underline{\mathsf{E}}_\wedge\rangle < \Pi_{k=1,\cancel{k}}(\mathfrak{N}\langle \underline{\mathsf{e}}_k\rangle)\} \tag{22}$$

nonché $\underline{\mathsf{E}}_\wedge \subseteq \underline{\mathsf{C}}_\wedge$ di cui $\mathsf{C}_\wedge \equiv \wedge_{k=1,\cancel{k}}(\mathsf{C}_k)$ e $\{\underline{\mathsf{e}}_k \subseteq \underline{\mathsf{C}}_k;\ k=1,\cancel{k}\}$.

Tale $\underline{\mathsf{E}}_\wedge \subseteq \underline{\mathsf{C}}_\wedge$ può essere specificata come $\underline{\mathbb{E}}_{\wedge k} \subseteq \underline{\mathsf{C}}_\wedge$ di cui $\mathbb{E}_{\wedge k} \equiv \wedge_{k=1,\cancel{k}}(\mathbb{e}_{kk})$, $\{\mathbb{e}_{kk} \equiv \mathsf{C}_k;\ \forall k \neq \mathrm{k}\}$, $\mathbb{e}_{\mathrm{kk}} \equiv \mathsf{e}_{\mathrm{k}}$, $\underline{\mathsf{E}}_\wedge \subseteq \underline{\mathbb{E}}_{\wedge \mathrm{k}}$. Il detto significato proprio di entrambi i $\mathsf{E}_\cap$ e $\mathsf{E}_\wedge$ porta che $\cap_{\mathrm{k}=1,\cancel{k}}(\mathbb{E}_{\wedge\mathrm{k}})$ è l'accadere di tutti i $\{\mathbb{e}_{\mathrm{k}k};\ k=1,\cancel{k};\ \mathrm{k}=1,\cancel{k}\}$. La definizione di $\mathbb{e}_{\mathrm{k}k}$ porta che tale accadere è quello di tutti i $\{\mathsf{e}_k, \mathsf{C}_k;\ k=1,\cancel{k}\}$ che, per $\mathsf{e}_k \rightarrow \mathsf{C}_k$ (dovuta a (15) e $\underline{\mathsf{e}}_k \subseteq \underline{\mathsf{C}}_k$) e $\{\mathsf{e}_k \rightarrow \mathsf{C}_k\} \equiv \{\mathsf{e}_k \equiv \{\mathsf{e}_k, \mathsf{C}_k\}\}$ (affermata da (2.1.1.3) di [1]), è necessario e sufficiente per l'accadere di $\mathsf{E}_\wedge$. Perciò si ha $\cap_{\mathrm{k}=1,\cancel{k}}(\mathbb{E}_{\wedge\mathrm{k}}) \equiv \mathsf{E}_\wedge$.

Sostituendo in questa $\{\mathsf{e}_k;\ k=1,\cancel{k}\}$ con $\{\neg\mathsf{e}_k;\ k=1,\cancel{k}\}$ si ha $\wedge_{k=1,\cancel{k}}(\neg\mathsf{e}_k) \equiv \cap_{\mathrm{k}=1,\cancel{k}}(\wedge_{k=1,\cancel{k}}(\mathbb{e}_{\mathrm{k}k}{}^\neg))$ di cui $\{\mathbb{e}_{\mathrm{k}k}{}^\neg \equiv \mathsf{C}_k;\ \forall k \neq \mathrm{k}\}$, $\mathbb{e}_{\mathrm{kk}}{}^\neg \equiv \neg\mathsf{e}_{\mathrm{k}}$, e quindi $\neg\wedge_{k=1,\cancel{k}}(\neg\mathsf{e}_k) \equiv \neg\cap_{\mathrm{k}=1,\cancel{k}}(\wedge_{k=1,\cancel{k}}(\mathbb{e}_{\mathrm{k}k}{}^\neg))$ che, per (8), diviene $\mathsf{E}_\vee \equiv \cup_{\mathrm{k}=1,\cancel{k}}(\neg\wedge_{k=1,\cancel{k}}(\mathbb{e}_{\mathrm{k}k}{}^\neg))$ il cui $\neg\wedge_{k=1,\cancel{k}}(\mathbb{e}_{\mathrm{k}k}{}^\neg)$, se $\mathcal{B}\langle \mathsf{C}_\wedge\rangle$ i.e. se $\mathsf{C}_\wedge$ è certo, può essere sostituito da $\mathbb{E}_{\wedge\mathrm{k}}$.

Pertanto se $\mathcal{B}\langle \mathsf{C}_\wedge\rangle$ si ha

$$\mathsf{E}_\wedge \equiv \cap_{\mathrm{k}=1,\cancel{k}}(\mathbb{E}_{\wedge\mathrm{k}}) \qquad \mathsf{E}_\vee \equiv \cup_{\mathrm{k}=1,\cancel{k}}(\mathbb{E}_{\wedge\mathrm{k}}) \tag{23}$$

di cui $\underline{\mathsf{E}}_\wedge \subseteq \underline{\mathsf{E}}_\vee \subseteq \underline{\mathsf{C}}_\wedge$ (conforme a $\underline{\mathsf{E}}_\cap \subseteq \underline{\mathsf{E}}_\cup$) e che consente di collocare ogni $\underline{\mathbb{E}}_{\wedge\mathrm{k}}$ in uno spazio evidentemente analogo a uno spazio cartesiano $\cancel{k}$-dimensionale. Specificando $\{\mathsf{e}_k;\ k=1,\cancel{k}\}$ come $\{\mathsf{C}_k;\ k=1,\cancel{k}\}$ nelle (23), queste divengono $\mathsf{C}_\wedge \equiv \cap_{\mathrm{k}=1,\cancel{k}}(\mathsf{C}_\wedge)$ e $\vee_{k=1,\cancel{k}}(\mathsf{C}_k) \equiv \cup_{\mathrm{k}=1,\cancel{k}}(\mathsf{C}_\wedge)$ di cui $\cap_{\mathrm{k}=1,\cancel{k}}(\mathsf{C}_\wedge) \equiv \cup_{\mathrm{k}=1,\cancel{k}}(\mathsf{C}_\wedge) \equiv \mathsf{C}_\wedge$ (dovuta a $\boxtimes_{k=1,\cancel{k}}(\underline{\mathsf{A}}) \equiv \underline{\mathsf{A}}$) e che perciò mostrano $\vee_{k=1,\cancel{k}}(\mathsf{C}_k) \equiv \mathsf{C}_\wedge$ che è coerente con $\mathcal{B}\langle \mathsf{E}_\wedge\rangle \equiv \wedge_{k=1,\cancel{k}}(\mathcal{B}\langle \mathsf{e}_k\rangle)$ nel senso che se $\mathcal{B}\langle \mathsf{E}_\wedge\rangle$ ogni e_k è implicitamente presente anche se non menzionato.

2.2 Probabilità

Si pongono, coerentemente con (7), le prime due di

$$\rho\langle \mathsf{A} \,\vert\, \mathsf{B}\rangle \equiv \mathfrak{N}\langle \underline{\mathsf{A}} \cap \underline{\mathsf{B}}\rangle / \mathfrak{N}\langle \underline{\mathsf{B}}\rangle \qquad \{\rho\langle \mathsf{A} \,\vert\, \mathsf{B}\rangle = \mathfrak{N}\langle \underline{\mathsf{A}}\rangle / \mathfrak{N}\langle \underline{\mathsf{B}}\rangle;\ \forall \underline{\mathsf{A}} \subseteq \underline{\mathsf{B}}\} \qquad \rho\langle \mathsf{A} \,\vert\, \mathsf{B}\rangle + \rho\langle \neg\mathsf{A} \,\vert\, \mathsf{B}\rangle = 1 \tag{24}$$

la cui terza è affermata da (3.2.1.2) di [1].

Si intende $\mathfrak{R} \equiv (-\infty,\infty)$ con ∞ un numero illimitatamente grande. Coerentemente con (24) e (4.2.2) di [1] si ha

$$\rho\langle a \le \mathsf{s} \le b \,\vert\, \mathsf{s} \in \mathfrak{R}\rangle = \mathfrak{N}\langle \underline{\mathbb{M}}\langle a \le \mathsf{s} \le b\rangle\rangle / \mathfrak{N}\langle \underline{\mathbb{M}}\langle \mathsf{s} \in \mathfrak{R}\rangle\rangle = \textstyle\int_{a,b}(\mathcal{D}\langle \mathsf{s}\rangle(\mathrm{x})\cdot \mathrm{dx}) = \int_{-\infty,b}(\mathcal{D}_{\mathsf{s}}(\mathrm{x})\cdot \mathrm{dx}) - \int_{-\infty,a}(\mathcal{D}_{\mathsf{s}}(\mathrm{x})\cdot \mathrm{dx}) \tag{25}$$

dove s è una variabile casuale e $\mathcal{D}_{\mathsf{s}}(\mathrm{x})$ la sua funzione di densità di probabilità (PDF). In tale $\mathcal{D}_{\mathsf{s}}(\mathrm{x})$ x ha anche l'identità di valore di s.

It is understood IPM $\equiv$ {the first member of}.

Da: (24), $\underline{\mathsf{E}}_\wedge \subseteq \underline{\mathsf{C}}_\wedge$; $\mathbb{I}\langle \mathsf{e}_k;\ k=1,\cancel{k}\rangle$ e (22); (24), $\underline{\mathsf{e}}_k \subseteq \underline{\mathsf{C}}_k$; segue IPM

$$\{\rho\langle \mathsf{E}_\wedge \,\vert\, \mathsf{C}_\wedge\rangle = \mathfrak{N}\langle \underline{\mathsf{E}}_\wedge\rangle / \mathfrak{N}\langle \underline{\mathsf{C}}_\wedge\rangle = \Pi_{k=1,\cancel{k}}(\mathfrak{N}\langle \underline{\mathsf{e}}_k\rangle / \mathfrak{N}\langle \underline{\mathsf{C}}_k\rangle) = \Pi_{k=1,\cancel{k}}(\rho\langle \mathsf{e}_k \,\vert\, \mathsf{C}_k\rangle)\} \underline{\leftarrow} \mathbb{I}\langle \mathsf{e}_k;\ k=1,\cancel{k}\rangle \tag{26}$$

Con riferimento a (17), si pone

$\mathfrak{C}\langle E\rangle \equiv \mathcal{A}\langle E\rangle \wedge \mathcal{B}\langle E\rangle \wedge \mathcal{C}\langle E\rangle$ $\qquad$ $\mathcal{A}\langle E\rangle \equiv$ "E è individuato univocamente"

$\mathcal{C}\langle E\rangle \equiv$ "tutti gli elementi di $\underline{E}$ hanno la stessa potenzialità di essere la modalità con cui accade E"

che rende evidente $\mathfrak{C}\langle \dot\cup_{k=1,\mathsf{k}}(e_k)\rangle \equiv \dot\forall_{k=1,\mathsf{k}}(\mathfrak{C}\langle e_k\rangle)$ e per $\{\mathcal{P}_A \wedge \mathcal{P}_B\} \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B$, tautologia nota come *eliminazione della congiunzione*, $\mathfrak{C}\langle E\rangle \underline{\rightarrow} \mathcal{B}\langle E\rangle$.

Chiamando $\mathbb{P}\langle A\rangle$ la probabilità di A, si ha

$$\mathfrak{C}\langle B\rangle \underline{\rightarrow} \{\mathbb{P}\langle A\rangle \equiv \mathbb{P}\langle A \cap B\rangle = \rho\langle A \mid B\rangle\} \qquad \mathbb{P}\langle A\rangle + \mathbb{P}\langle \neg A\rangle = 1 \tag{27}$$

la cui seconda segue da definizione di $\neg E$.

La $\underline{A} \subseteq \underline{B}$ implica $\mathfrak{N}\langle \underline{A} \cap \underline{C}\rangle \leq \mathfrak{N}\langle \underline{B} \cap \underline{C}\rangle$. Ciò e prima di (27) danno luogo alla sola $\{\mathfrak{C}\langle C\rangle, \underline{A} \subseteq \underline{B}\} \underline{\rightarrow} \{\mathbb{P}\langle A\rangle = \rho\langle A \mid C\rangle \leq \rho\langle B \mid C\rangle = \mathbb{P}\langle B\rangle\}$. Tuttavia prima di (27) e il solo significato di $A \twoheadrightarrow B$ consentono anche

$$\{\mathfrak{C}\langle C\rangle, A \twoheadrightarrow B\} \underline{\rightarrow} \{\rho\langle A \mid C\rangle = \mathbb{P}\langle A\rangle \leq \mathbb{P}\langle B\rangle\} \tag{28}$$

La (27) indica che $\mathbb{P}\langle A\rangle$ non ha carattere assoluto e universale, ma relativo e contingente come quello dell'inerente B. Infatti (27) rende possibili tutte le generalmente diverse $\mathbb{P}\langle A\rangle$ che corrispondono alle diverse scelte di B, conseguendo che ognuna di tali probabilità ha il carattere eminentemente convenzionale dell'essere inerente solo il particolare contesto determinato dalla scelta del corrispondente B.

Tuttavia, essendo evidente che $\mathbb{P}\langle A\rangle$ è più significativa se B rappresenta meglio il contesto nel quale interessano informazioni su A e in particolare se sussiste $\underline{A} \subseteq \underline{B}$ per cui interviene l'intero $\underline{A}$ e non la sola $\underline{A} \cap \underline{B}$ del caso $\underline{A} \neq \underline{A} \cap \underline{B}$, è anche evidente che una $\mathbb{P}\langle A\rangle$ può essere considerata come l'unica vera e non meramente convenzionale probabilità di A, e in questo caso è indicata $\mathfrak{P}\langle A\rangle$, se B è l'evento che ha la minore $\mathfrak{N}\langle \underline{B}\rangle$ compatibilmente con $\underline{A} \subseteq \underline{B}$ e

$$\neg\exists \underline{\mathcal{P}}_{AB} \neq \{\{\neg\underline{B} \subseteq \neg\underline{A}\} \underline{\rightarrow} \{\mathfrak{E}\langle \neg\underline{B}\rangle \equiv \mathfrak{E}\langle \neg\underline{A}\rangle\}\} \tag{29}$$

dove $\underline{\mathcal{P}}_{AB}$ è un insieme di proposizioni da cui è logicamente deducibile $\mathfrak{E}\langle \neg\underline{B}\rangle \equiv \mathfrak{E}\langle \neg\underline{A}\rangle$, con $\neg\underline{B} \subseteq \neg\underline{A}$ che si deduce da $\underline{A} \subseteq \underline{B}$ e (10), ed equivalendo tale (29) all'assenza di ogni relazione che possa essere implicata tra A e $\neg B$ dalle loro rispettive proprietà. Tale evidenza, i.e. la testé detta definizione di $\mathfrak{P}\langle A\rangle$, è basata sull'escludere ogni modalità che non ha alcuna relazione con A e viceversa nell'includere ogni modalità che ha relazione con A. Coerentemente con ciò in (28) si ha $\mathbb{P}\langle B\rangle \equiv \mathfrak{P}\langle B\rangle$ se nessuna relazione tra $\neg C$ e B può essere implicata dalle loro proprietà.

2.3 Una applicazione di eventi composti

Si considera $\mathcal{B}\langle Q_\wedge\rangle$ di cui $Q_\wedge \equiv \wedge_{d=1,\mathsf{d}}(q_d)$, $q_d \equiv p_d \dot\cup \neg p_d$, $\mathbb{I}\langle q_d;\, d=1,\mathsf{d}\rangle$, e la $\{q_a \neq q_b;\, \forall\{a,b\} \subseteq \{k=1,\mathsf{k}\}\}$ dovuta al solo fatto che $\{d=1,\mathsf{d}\}$ indica d diversi giorni i.e. con ogni $q_a \neq q_b$ causata soltanto all'accadere q_a e q_b nei rispettivi e diversi giorni a-esimo e b-esimo. Ciò implica sia $\{q_d;\, d=1,\mathsf{d}\}$ come d accadimenti di uno stesso q sia $\{p_d;\, d=1,\mathsf{d}\}$ come d accadimenti di uno stesso p, avendo perciò anche $q \equiv p \dot\cup \neg p$.

Ponendo le

$$R_{\wedge kb} \equiv \wedge_{d=1,\mathsf{d}}(r_{u\langle k,b,d\rangle}) \qquad \{r_{u\langle k,b,d\rangle} \equiv p_{u\langle k,b,d\rangle};\, d=1,k\} \qquad \{r_{u\langle k,b,d\rangle} \equiv \neg p_{u\langle k,b,d\rangle};\, d=k+1,\mathsf{d}\} \qquad \{u_{kbd};\, d=1,\mathsf{d}\} = \{d=1,\mathsf{d}\} \tag{abc}$$

si ha

$$\{\underline{R}_{\wedge kb} \subseteq \underline{Q}_\wedge, R_{\wedge kb} \twoheadrightarrow P_k \equiv \{\text{in } \mathsf{d} \text{ giorni accade } k \text{ volte } p \text{ e } \mathsf{d}-k \text{ volte } \neg p\};\, b=1,N_R\} \tag{30}$$

la cui $\underline{R}_{\wedge kb} \subseteq \underline{Q}_\wedge$ è dovuta a $\underline{r}_d \subseteq \underline{q}_d$, e di cui si ha $N_R = \mathsf{d}!$ come immediata conseguenza dell'essere $(u_{kbd};\, d=1,\mathsf{d})$ una b-esima permutazione di $\{d=1,\mathsf{d}\}$ affermato da ultima di (abc).

Tale $N_R = \mathsf{d}!$ è confermata dall'evidente possibilità di porre $N_R = N_{RA} \cdot N_{RB}$ con N_{RA} il numero di disposizioni di classe k di d oggetti (i.e. $N_{RA} = \mathsf{d}!/(\mathsf{d}-k)!$) e N_{RB} il numero di permutazioni di $\mathsf{d}-k$ oggetti (i.e. $N_{RB} = (\mathsf{d}-k)!$), o viceversa con N_{RA} il numero di disposizioni di classe $\mathsf{d}-k$ di d oggetti (i.e. $N_{RA} = \mathsf{d}!/k!$) e N_{RB} il numero di permutazioni di k oggetti (i.e. $N_{RB} = k!$).

Da: $\text{Æ}\langle \mathcal{B}\langle Q_\wedge\rangle, (30) \,/\, \text{primo membro di (21)}\rangle$; il mero ipotizzare la possibilità di casi quali $\{R_{\wedge ka} \equiv R_{\wedge kb} \mid a \neq b\}$, commutatività e associatività dell'unione, $\{A \equiv B\} \underline{\rightarrow} \{A \cup B \equiv A\}$; segue

$$P_k \equiv \cup_{b=1,N\langle R\rangle}(R_{\wedge kb}) \equiv \cup_{b=1,N\langle S\rangle}(S_{\wedge kb}) \equiv \dot\cup_{b=1,N\langle S\rangle}(S_{\wedge kb}) \tag{31}$$

di cui $\{S_{\wedge kb};\, b=1,N_S\} \subseteq \{R_{\wedge kb};\, b=1,N_R\}$ con N_S il massimo compatibile con $\{S_{\wedge kr} \neq S_{\wedge ks};\, \forall\{r,s\} \subseteq \{b=1,N_S\}\}$, e il cui ultimo membro è dovuto alla mutua esclusività di tali $\{S_{\wedge kb};\, b=1,N_S\}$ che è sostanzialmente evidenziata dal fatto che ognuno di questi N_S eventi è una specificazione di $Q_\wedge$ il cui accadere esclude quello di tutte le altre.

Da: ultima di (abc); commutatività di $\wedge_{i=1,\text{ɨ}}(\text{ş}_i)$, (4); segue

$\{\{u_{kmd};\, d=1,k\} \neq \{u_{knd};\, d=1,k\}\} \equiv \{\{u_{kmd};\, d=k+1,đ\} \neq \{u_{knd};\, d=k+1,đ\}\} \equiv \{R_{\wedge km} \not\equiv R_{\wedge kn}\}$

Questa e (11) danno luogo a

$\{S_{\wedge kb};\, b=1,N_S\} \Leftrightarrow \{\{\underline{d}_{kba};\, a=1,k\};\, b=1,Б\langle đ,k\rangle\} \Leftrightarrow \{\{\underline{d}_{kba};\, a=1,đ-k\};\, b=1,Б\langle đ,đ-k\rangle\}$

dove $\underline{d}\langle k,b,a\rangle$ è il a-esimo elemento della b-esima combinazione di classe k dei $\{d=1,đ\}$, $\{\underline{d}_{kba};\, a=1,đ-k\} = \{d=1,đ\} - \{\underline{d}_{kba};\, a=1,k\}$.

Quindi ogni $S_{\wedge kb}$ corrisponde a una diversa combinazione di classe k (and/or $đ-k$) degli elementi di $\{d=1,đ\}$ come è specificato da

$$N_S = Б\langle đ,k\rangle \qquad S_{\wedge kb} \equiv \wedge_{a=1,k}(p_{\underline{d}\langle k,b,a\rangle}) \wedge \wedge_{a=1,đ-k}(\neg p_{\underline{d}\langle k,b,a\rangle}) \tag{32}$$

Da: $Q_\wedge \equiv \wedge_{d=1,đ}(q_d)$, $\mathbb{I}\langle q_d;\, d=1,đ\rangle$, (22); $\mathcal{N}\langle \underline{q}_d\rangle = \mathcal{N}\langle \underline{q}\rangle$ dovuta all'essere i $\{q_d;\, d=1,đ\}$ đ accadimenti di uno stesso q; segue $\mathcal{N}\langle \underline{Q}_\wedge\rangle = \Pi_{d=1,đ}(\mathcal{N}\langle \underline{q}_d\rangle) = (\mathcal{N}\langle \underline{q}\rangle)^{đ}$. Inoltre $\mathbb{I}\langle q_d;\, d=1,đ\rangle$, $\{\underline{p}_d \subseteq \underline{q}_d, \neg\underline{p}_d \subseteq \underline{q}_d\}$ (dovute a $q_d \equiv p_d \,\dot\cup\, \neg p_d$), e seconda di (18) portano $\mathbb{I}\langle\{p_{\underline{d}\langle k,b,a\rangle};\, a=1,k\},\{\neg p_{\underline{d}\langle k,b,a\rangle};\, a=1,đ-k\}\rangle$. Da: questa, (22), seconda di (32); $\mathcal{N}\langle \underline{p}_d\rangle = \mathcal{N}\langle \underline{p}\rangle$ e $\mathcal{N}\langle \neg\underline{p}_d\rangle = \mathcal{N}\langle \neg\underline{p}\rangle$ dovute all'essere i $\{p_d;\, d=1,đ\}$ đ accadimenti di uno stesso p; segue

$$\mathcal{N}\langle \underline{S}_{\wedge kb}\rangle = \Pi_{a=1,k}(\mathcal{N}\langle \underline{p}_{\underline{d}\langle k,b,a\rangle}\rangle)\cdot\Pi_{a=1,đ-k}(\mathcal{N}\langle \neg\underline{p}_{\underline{d}\langle k,b,a\rangle}\rangle) = (\mathcal{N}\langle \underline{p}\rangle)^{k}\cdot(\mathcal{N}\langle \neg\underline{p}\rangle)^{đ-k}$$

Da: $\underline{S}_{\wedge kb} \subseteq \underline{Q}_\wedge$ (dovuta a $\{S_{\wedge kb};\, b=1,N_S\} \subseteq \{R_{\wedge kb};\, b=1,N_R\}$ e $\underline{R}_{\wedge kb} \subseteq \underline{Q}_\wedge$), seconda di (24); precedenti espressioni di $\mathcal{N}\langle \underline{Q}_\wedge\rangle$ e $\mathcal{N}\langle \underline{S}_{\wedge kb}\rangle$; $\{\underline{p} \subseteq \underline{q}, \neg\underline{p} \subseteq \underline{q}\}$ (dovute a $q \equiv p \,\dot\cup\, \neg p$); terza di (24); segue

$$\rho\langle S_{\wedge kb} \,¦\, Q_\wedge\rangle = \mathcal{N}\langle \underline{S}_{\wedge kb}\rangle / \mathcal{N}\langle \underline{Q}_\wedge\rangle = (\mathcal{N}\langle \underline{p}\rangle / \mathcal{N}\langle \underline{q}\rangle)^{k}\cdot(\mathcal{N}\langle \neg\underline{p}\rangle / \mathcal{N}\langle \underline{q}\rangle)^{đ-k} = (\rho\langle p \,¦\, q\rangle)^{k}\cdot(\rho\langle \neg p \,¦\, q\rangle)^{đ-k} = (\rho\langle p \,¦\, q\rangle)^{k}\cdot(1 - \rho\langle p \,¦\, q\rangle)^{đ-k} \tag{33}$$

Da: (31); $\rho\langle E_{\dot\cup} \,¦\, B\rangle = \Sigma_{k=1,\text{ӄ}}(\rho\langle e_k \,¦\, B\rangle)$ affermata da (3.2.1.11) di [1]; (33), prima di (32); segue

$$\rho\langle P_k \,¦\, Q_\wedge\rangle = \rho\langle \dot\cup_{b=1,N\langle S\rangle}(S_{\wedge kb}) \,¦\, Q_\wedge\rangle = \Sigma_{b=1,N\langle S\rangle}(\rho\langle S_{\wedge kb} \,¦\, Q_\wedge\rangle) = Б\langle đ,k\rangle\cdot(\rho\langle p \,¦\, q\rangle)^{k}\cdot(1 - \rho\langle p \,¦\, q\rangle)^{đ-k} \tag{34}$$

Le (31) e $\underline{S}_{\wedge kb} \subseteq \underline{Q}_\wedge$ implicano $\underline{P}_k \subseteq \underline{Q}_\wedge$, ed inoltre la definizione di P_k (in (30)) evidenzia

$\{P_h \twoheadrightarrow \mathbb{P}_k \equiv \{\text{in đ giorni } p \text{ accade almeno } k \text{ volte}\};\, h=k,đ\}$

Da: ciò e $\mathcal{B}\langle Q_\wedge\rangle$, (21), $\{\underline{P}_a \cap \underline{P}_b = \varnothing;\, \forall\{a,b\} \subseteq \{h=k,đ\}\}$; þ; (34); segue

$$\rho\langle \mathbb{P}_k \,¦\, Q_\wedge\rangle = \rho\langle \dot\cup_{h=k,đ}(P_h) \,¦\, Q_\wedge\rangle = \Sigma_{h=k,đ}(\rho\langle P_h \,¦\, Q_\wedge\rangle) = \Sigma_{h=k,đ}(Б\langle đ,h\rangle\cdot(\rho\langle p \,¦\, q\rangle)^{h}\cdot(1 - \rho\langle p \,¦\, q\rangle)^{đ-h}) \tag{35}$$

La prima di (27) dà luogo a

$\mathfrak{C}\langle Q_\wedge\rangle \underline{\rightarrow} \{\mathfrak{P}\langle P_k\rangle = \rho\langle P_k \,¦\, Q_\wedge\rangle, \mathfrak{P}\langle \mathbb{P}_k\rangle = \rho\langle \mathbb{P}_k \,¦\, Q_\wedge\rangle\}$

che insieme alle (34) e (35) esprime due probabilità notevoli come risultato dell'avere applicato proprietà di eventi composti.

3 LA PROBABILITÀ DI UNA COSTANTE INCOGNITA

Una $G \in \underline{\mathfrak{R}}$, dove G è una grandezza, implica $\underline{\mathfrak{R}} \subseteq \mathfrak{R}$ e significa che G ha valore uguale a quello di uno degli elementi dell'insieme $\underline{\mathfrak{R}}$. Chiamando $\mathfrak{R}\langle G\rangle$ l'insieme dei diversi valori che può avere G (e intendendo che un pedice può rappresentare anche una stringa di caratteri vuota i.e. assente), si ha $\{G \in \mathfrak{R}_G\}_A \equiv \{G \in \mathfrak{R}\}_A$ e $\{G \in \neg\mathfrak{R}_G\}_A \equiv \{G \in \neg\mathfrak{R}\}_A \equiv E_\varnothing$. Si considera implicito che un $\{G \in \underline{\mathfrak{R}}\}_A$ può accadere solo se $\mathcal{B}\langle\{G \in \mathfrak{R}\}_A\rangle$ e quindi si ha $\neg\{G \in \underline{\mathfrak{R}}\}_A \equiv \{G \in \mathfrak{R} - \underline{\mathfrak{R}}\}_A$. Essendo evidente la prima delle

$$\{\underline{\mathfrak{R}}_a \subseteq \underline{\mathfrak{R}}_b\} \equiv \{\underline{\mathbb{M}}\langle\{G \in \underline{\mathfrak{R}}_a\}_A\rangle \subseteq \underline{\mathbb{M}}\langle\{G \in \underline{\mathfrak{R}}_b\}_A\rangle\} \qquad \circlearrowleft_{m=1,\text{ɱ}}(\{G \in \underline{\mathfrak{R}}_m\}_A) \equiv \{G \in \circlearrowleft_{m=1,\text{ɱ}}(\underline{\mathfrak{R}}_m)\}_A \tag{36}$$

la seconda di esse è mostrata da prima di (20), unicità di $\mathbb{M}_E$ (detta nel secondo capoverso di sezione 2) e dal fatto che un $\mathfrak{E}\langle \underline{\mathbb{M}}\langle G \in \underline{\mathfrak{R}}\rangle\rangle$ riguarda un solo valore di G.

Da: $\underline{A} = \{\underline{A} \cap \underline{B}\} \cup \{\underline{A} \cap \neg\underline{B}\}$ (in (2.2.23) di [1]); $\underline{A} \cap \underline{B} = \underline{A} - \neg\underline{B}$ (in (2.2.7) di [1]); seconda di (36); $\{G \in \neg\mathfrak{R}\}_A \equiv E_\varnothing$; $\neg\{G \in \underline{\mathfrak{R}}\}_A \equiv \{G \in \mathfrak{R} - \underline{\mathfrak{R}}\}_A$; segue

$$\{G \in \neg\underline{\mathfrak{R}}\}_A \equiv \{G \in \{\mathfrak{R} \cap \neg\underline{\mathfrak{R}}\} \cup \{\neg\underline{\mathfrak{R}} \cap \neg\mathfrak{R}\}\}_A \equiv \{G \in \{\mathfrak{R} - \underline{\mathfrak{R}}\} \cup \{\neg\underline{\mathfrak{R}} \cap \neg\mathfrak{R}\}\}_A \equiv \{G \in \mathfrak{R} - \underline{\mathfrak{R}}\}_A \cup \{\{G \in \neg\underline{\mathfrak{R}}\}_A \cap \{G \in \neg\mathfrak{R}\}_A\} \equiv$$

$$\{G \in \mathfrak{R} - \underline{\mathfrak{R}}\}_A \equiv \neg\{G \in \underline{\mathfrak{R}}\}_A$$

La $\{G\in\neg\underline{\mathfrak{R}}\}_A\equiv\{G\in\mathfrak{R}-\underline{\mathfrak{R}}\}_A$ comporta che in relazione a un $\{G\in\neg\underline{\mathfrak{R}}\}_A$ è implicita la convenzionale $\neg\underline{\mathfrak{R}}\equiv\underline{\mathfrak{R}}-\underline{\mathfrak{R}}$. Da: questa; $\underline{\mathfrak{R}}\subseteq\underline{\mathfrak{R}}$; segue $\underline{\mathfrak{R}}\cup\neg\underline{\mathfrak{R}}=\underline{\mathfrak{R}}\cup\{\underline{\mathfrak{R}}-\underline{\mathfrak{R}}\}=\underline{\mathfrak{R}}$.

Quanto testé e seconda di (36) danno luogo a

$$\{\{G\in\mathfrak{R}\}_A\equiv\{G\in\underline{\mathfrak{R}}\}_A\cup\neg\{G\in\underline{\mathfrak{R}}\}_A,\ \neg\{G\in\underline{\mathfrak{R}}\}_A\equiv\{G\in\neg\underline{\mathfrak{R}}\}_A,\ \neg\underline{\mathfrak{R}}\equiv\underline{\mathfrak{R}}-\underline{\mathfrak{R}}\}\ \underline{\leftarrow}\ \mathcal{B}\langle\{G\in\mathfrak{R}\}_A\rangle \tag{37}$$

Si intende che X è una costante incognita e se ne pongono le $\mathsf{e}\equiv\{X\in\underline{\mathfrak{R}}\}$, $\bar{\mathsf{e}}\equiv\{X\in\mathfrak{R}\}$. L'essere X una costante porta che e_A non è l'accadere di uno dei valori di X che sono elementi di $\underline{\mathfrak{R}}$ quando $\underline{\mathsf{e}}_A$ sarebbe stato un'addizione di sottoinsiemi ognuno corrispondente a un diverso $\mathfrak{E}\langle\underline{\mathfrak{R}}\rangle$, ma è invece l'accadere di un insieme $\underline{\mathfrak{R}}$ di cui è elemento l'unico valore che può avere X e riguardando perciò ogni $\mathfrak{E}\langle\underline{\mathsf{e}}_A\rangle$ tale stesso valore. Tuttavia ciò né influisce sull'informazione espressa da e_A su X né impedisce una $\mathbb{I}\langle\bar{\mathsf{e}}_A,\bar{\mathsf{e}}_B\rangle$.

La seconda di (36) porta $\{\cap_{m=1,\mathfrak{m}}(\{G\in\underline{\mathfrak{R}}_m\}_A)\mid\cap_{m=1,\mathfrak{m}}(\underline{\mathfrak{R}}_m)=\varnothing\}\equiv\{G\in\varnothing\}_A$ il cui secondo membro è impossibile (i.e. $\mathsf{E}_\varnothing$) per cui sono considerati impossibili anche eventi quali il suo primo membro di cui peraltro non è definibile alcuna probabilità non nulla. Invece gli eventi di tipo $\{\wedge_{m=1,\mathfrak{m}}(\{X\in\underline{\mathfrak{R}}_m\}_m)\mid\cap_{m=1,\mathfrak{m}}(\underline{\mathfrak{R}}_m)=\varnothing\}$, pure potendone calcolare probabilità non nulle, sono però trascurati come resi evidentemente impossibili dalla costanza di X e coerentemente con l'ignorare una $\mathbb{P}\langle\mathsf{E}\rangle>0$ di un E impossibile i.e. il sostituirla con $\mathbb{P}\langle\mathsf{E}\rangle=0$ in quanto erroneamente conseguente da conoscenza approssimativa dell'ipotetico accadere di E.

Si pone

$$\{\underline{\bar{\mathsf{e}}}_A\cap\underline{\bar{\mathsf{e}}}_B\neq\varnothing\}\equiv\{\underline{\bar{\mathsf{e}}}_A\cap\underline{\bar{\mathsf{e}}}_B=\{\underline{\bar{\mathsf{e}}}_A\vee\underline{\bar{\mathsf{e}}}_B\}\} \tag{38}$$

poiché, essendo evidente che il secondo membro implica il primo, se questo non implicasse il secondo si avrebbe un'impossibilità a giustificare quale quella del x-esimo capoverso di pag. x.

Da: (38), (7); (8); segue

$$\{\underline{\bar{\mathsf{e}}}_A\cap\underline{\bar{\mathsf{e}}}_B=\varnothing\}\equiv\neg\{\{\underline{\bar{\mathsf{e}}}_A\subseteq\underline{\bar{\mathsf{e}}}_B\}\vee\{\underline{\bar{\mathsf{e}}}_B\subseteq\underline{\bar{\mathsf{e}}}_A\}\}\equiv\neg\{\underline{\bar{\mathsf{e}}}_A\subseteq\underline{\bar{\mathsf{e}}}_B\}\wedge\neg\{\underline{\bar{\mathsf{e}}}_B\subseteq\underline{\bar{\mathsf{e}}}_A\} \tag{39}$$

Si chiama $\underline{\mathcal{I}}$ un insieme di cui $\underline{\mathcal{I}}\equiv\{\bar{\mathsf{e}}_t;\ t=1,\mathfrak{t}\}$ e la cui numerosità $\mathfrak{t}$ è massima subordinatamente alla condizione

$$\{\underline{\bar{\mathsf{e}}}_A\cap\underline{\bar{\mathsf{e}}}_B=\varnothing;\ \forall\{\bar{\mathsf{e}}_A,\bar{\mathsf{e}}_B\}\subseteq\underline{\mathcal{I}}\} \tag{40}$$

che, insieme a (39), evidenzia che $\underline{\mathcal{I}}$ non può avere elementi del tipo $\underline{\mathbb{M}}\langle\cup_{k=1,\mathfrak{k}}(\bar{\mathsf{e}}_k)\rangle$ e $\underline{\mathbb{M}}\langle\cap_{k=1,\mathfrak{k}}(\bar{\mathsf{e}}_k)\rangle$ poiché impedirebbero che $\mathfrak{t}$ sia un massimo.

Coerentemente con (40) e $\underline{\mathsf{e}}_t\subseteq\underline{\bar{\mathsf{e}}}_t$ (dovuta a prima di (36)), si introducono gli eventi $\bar{\mathsf{e}}_\cup$ e $\mathsf{e}_\cup$ di cui

$$\underline{\mathbb{M}}\langle\mathsf{e}_\cup\rangle\equiv\cup_{t=1,\mathfrak{t}}(\underline{\mathsf{e}}_t)\subseteq\cup_{t=1,\mathfrak{t}}(\underline{\bar{\mathsf{e}}}_t)\equiv\underline{\mathbb{M}}\langle\bar{\mathsf{e}}_\cup\rangle \tag{41}$$

In conformità ai primi due capoversi di sezione 1, $\bar{\mathsf{e}}$ ha il significato implicato da $\bar{\mathsf{e}}\equiv\{X\in\mathfrak{R}\}$. Ciò, in base a (5) e al capoverso che la introduce, implica $\bar{\mathsf{e}}_A\twoheadrightarrow\bar{\mathsf{e}}$.

Le $\underline{\bar{\mathsf{e}}}_\cup\equiv\cup_{t=1,\mathfrak{t}}(\underline{\bar{\mathsf{e}}}_t)$ e $\bar{\mathsf{e}}_A\twoheadrightarrow\bar{\mathsf{e}}$ danno rispettivamente luogo ai due membri di ogni t-esimo elemento di $\{\underline{\bar{\mathsf{e}}}_t\subseteq\underline{\bar{\mathsf{e}}}_\cup,\bar{\mathsf{e}}_t\twoheadrightarrow\bar{\mathsf{e}};\ t=1,\mathfrak{t}\}$ che specifica la $\mathcal{E}_1$ di (21). Si sottintende $\mathcal{B}\langle\bar{\mathsf{e}}_\cup\rangle$ che esclude ogni $\neg\bar{\mathsf{e}}_t\equiv\{X\in\neg\mathfrak{R}\}_t\equiv\mathsf{E}_\varnothing$ (viceversa implicata da seconda di (37) e $\mathcal{B}\langle\bar{\mathsf{e}}_t\rangle$), pertanto si ha la specificazione della $\mathcal{E}_3$ di (21) consistente nell'essere le proprietà di ogni $\mathfrak{E}\langle\bar{\mathsf{e}}_\cup\rangle$ coerenti nell'implicare un $\mathfrak{E}\langle\bar{\mathsf{e}}\rangle$. Da: ciò e seconda di (21); $\neg\exists\mathcal{P}_A\equiv\{\neg\mathcal{P}_A;\ \forall A\}$; (7); segue

$$\{\bar{\mathsf{e}}\equiv\bar{\mathsf{e}}_\cup\}\ \underline{\leftarrow}\ \{\neg\exists\underline{\bar{\mathsf{e}}}_\cup\cup\underline{\bar{\mathsf{e}}}_A\neq\underline{\bar{\mathsf{e}}}_\cup\}\equiv\{\underline{\bar{\mathsf{e}}}_\cup\cup\underline{\bar{\mathsf{e}}}_A=\underline{\bar{\mathsf{e}}}_\cup;\ \forall\bar{\mathsf{e}}_A\}\equiv\{\underline{\bar{\mathsf{e}}}_A\subseteq\underline{\bar{\mathsf{e}}}_\cup;\ \forall\bar{\mathsf{e}}_A\} \tag{42}$$

di cui

$$\neg\{\underline{\bar{\mathsf{e}}}_A\subseteq\underline{\bar{\mathsf{e}}}_\cup\}\equiv\mathcal{P}_{A1}\dot{\vee}\mathcal{P}_{A2}\dot{\vee}\mathcal{P}_{A3}\qquad\mathcal{P}_{A1}\equiv\{\underline{\bar{\mathsf{e}}}_\cup\subset\underline{\bar{\mathsf{e}}}_A\}\qquad\mathcal{P}_{A2}\equiv\{\underline{\bar{\mathsf{e}}}_\cup\cap\underline{\bar{\mathsf{e}}}_A\subset\underline{\bar{\mathsf{e}}}_\cup\}\wedge\{\underline{\bar{\mathsf{e}}}_\cup\cap\underline{\bar{\mathsf{e}}}_A\subset\underline{\bar{\mathsf{e}}}_A\}$$
$$\mathcal{P}_{A3}\equiv\{\underline{\bar{\mathsf{e}}}_\cup\cap\underline{\bar{\mathsf{e}}}_A=\varnothing\} \tag{43}$$

Le $\mathcal{P}_{A1}$ e $\mathcal{P}_{A2}$ sono ambedue false poiché ognuna di esse implica per ogni $\{\bar{\mathsf{e}}_\cup,\bar{\mathsf{e}}_A\}$ una impossibilità a giustificare analoga a quella del x-esimo capoverso di pag. x. Anche $\mathcal{P}_{A3}$ è falsa poiché è incoerente con la definizione di $\underline{\mathcal{I}}$ i.e. con l'essere $\mathfrak{t}$ il massimo compatibile con (40). Queste falsità, prima di (43) e (42) danno luogo a $\bar{\mathsf{e}}\equiv\bar{\mathsf{e}}_\cup$. Questa e $\underline{\mathsf{e}}\subseteq\underline{\bar{\mathsf{e}}}$ portano $\underline{\mathsf{e}}\subseteq\underline{\bar{\mathsf{e}}}_\cup$ per cui $\underline{\mathsf{e}}$ è costituito da tutti gli elementi di $\underline{\bar{\mathsf{e}}}_\cup$ compatibili con il significato di e e quindi $\mathsf{e}\equiv\mathsf{e}_\cup$.

Da: $\bar{\mathsf{e}}\equiv\bar{\mathsf{e}}_\cup$; prima di (27); segue

$$\mathfrak{C}\langle\bar{\mathsf{e}}_\cup\rangle\equiv\mathfrak{C}\langle\bar{\mathsf{e}}\rangle\ \underline{\rightarrow}\ \{\mathbb{P}\langle\mathsf{e}\rangle=\rho\langle\mathsf{e}\mid\bar{\mathsf{e}}\rangle\} \tag{44}$$

Si pone $\mathfrak{N}\langle\underline{\bar{\mathsf{e}}}_t\rangle=\infty$ in base all'illimitata grandezza di $\mathfrak{N}\langle\mathfrak{R}\rangle$ (e coerentemente con sez. 4.1 di [1]). Da: seconda di (24), $\underline{\mathsf{e}}_A\subseteq\underline{\bar{\mathsf{e}}}_A$; $\bar{\mathsf{e}}\equiv\bar{\mathsf{e}}_\cup$, $\mathsf{e}\equiv\mathsf{e}_\cup$; seconda di (12); $\mathfrak{N}\langle\underline{\bar{\mathsf{e}}}_t\rangle=\infty$; seconda di (24), $\underline{\mathsf{e}}_t\subseteq\underline{\bar{\mathsf{e}}}_t$; segue

$$\rho\langle e \mid \bar{e}\rangle = \mathfrak{N}\langle \underline{e}\rangle / \mathfrak{N}\langle \underline{\bar{e}}\rangle = \mathfrak{N}\langle \dot\cup_{t=1,\not{t}}(\underline{e}_t)\rangle / \mathfrak{N}\langle \dot\cup_{t=1,\not{t}}(\underline{\bar{e}}_t)\rangle = \Sigma_{t=1,\not{t}}(\mathfrak{N}\langle \underline{e}_t\rangle) / \Sigma_{t=1,\not{t}}(\mathfrak{N}\langle \underline{\bar{e}}_t\rangle) = \not{t}^{-1}\cdot\Sigma_{t=1,\not{t}}(\mathfrak{N}\langle \underline{e}_t\rangle / \mathfrak{N}\langle \underline{\bar{e}}_t\rangle) = \not{t}^{-1}\cdot\Sigma_{t=1,\not{t}}(\rho\langle e_t \mid \bar{e}_t\rangle) \quad (45)$$

La sopra dedotta $\{\underline{\bar{e}}_A \subseteq \underline{\bar{e}}_\smile = \underline{\bar{e}} \supseteq \underline{e}_\smile = \underline{e};\ \forall \bar{e}_A\}$ mostra che in (44) $\underline{\bar{e}}_\smile$ non può essere sostituito da un $\underline{\boxminus}$ tale che $\mathfrak{N}\langle\underline{\boxminus}\rangle < \mathfrak{N}\langle\underline{\bar{e}}_\smile\rangle$, $\underline{e} \subseteq \underline{\boxminus}$ e di cui non si possa dedurre una $\mathfrak{E}\langle\neg\underline{\boxminus}\rangle \equiv \mathfrak{E}\langle\neg\underline{e}\rangle$ senza usare $\{\neg\underline{\boxminus} \subseteq \neg\underline{e}\} \underline{\rightarrow} \{\mathfrak{E}\langle\neg\underline{\boxminus}\rangle \equiv \mathfrak{E}\langle\neg\underline{e}\rangle\}$. Perciò la $\mathbb{P}\langle e\rangle$ di (44) è, in base all'ultimo capoverso di sezione 2.2, l'unica vera probabilità di e i.e. la $\mathfrak{P}\langle e\rangle$. Ciò, (44) e (45) danno luogo a

$$\mathfrak{C}\langle\bar{e}_\smile\rangle \equiv \mathfrak{C}\langle\bar{e}\rangle \underline{\rightarrow} \{\mathfrak{P}\langle e\rangle = \not{t}^{-1}\cdot\Sigma_{t=1,\not{t}}(\rho\langle e_t \mid \bar{e}_t\rangle)\} \quad (46)$$

Da: $\mathfrak{C}\langle\dot\cup_{k=1,\not{k}}(e_k)\rangle \equiv \dot\forall_{k=1,\not{k}}(\mathfrak{C}\langle e_k\rangle)$, $\bar{e}_\smile \equiv \dot\cup_{t=1,\not{t}}(\bar{e}_t)$; $e_t \twoheadrightarrow e$; (28); segue

$$\mathfrak{C}\langle\bar{e}_\smile\rangle \equiv \dot\forall_{t=1,\not{t}}(\mathfrak{C}\langle\bar{e}_t\rangle) \equiv \dot\forall_{t=1,\not{t}}(e_t \twoheadrightarrow e, \mathfrak{C}\langle\bar{e}_t\rangle) \underline{\rightarrow} \dot\forall_{t=1,\not{t}}(\rho\langle e_t \mid \bar{e}_t\rangle = \mathbb{P}\langle e_t\rangle \le \mathbb{P}\langle e\rangle) \quad (47)$$

che mostra come in assenza di (46) sarebbe impossibile avere una informazione praticamente utile sulla probabilità di e, poiché esisterebbero solo le seguenti due alternative, sostituire $\mathbb{P}\langle e\rangle$ con una $\mathbb{P}\langle e_t\rangle$ o scegliere una $\mathbb{P}\langle e_t\rangle \le \mathbb{P}\langle e\rangle$ ed escludere le restanti, le quali comporterebbero però entrambe una decisione ingiustificatamente arbitraria.

Da $\underline{I} \equiv \{\bar{e}_t;\ t=1,\not{t}\}$ è deducibile (con un qualsiasi criterio) una $\underline{I} \equiv \{\bar{e}_{mn};\ n=1,\not{n}_m;\ m=1,\not{m}\}$. Da questa si ha, coerentemente con $\bar{e} \equiv \bar{e}_\smile$, $e \equiv e_\smile$ e (41),

$$\{\underline{\bar{e}}_{mn} \subseteq \underline{\bar{e}}_m \subseteq \underline{\bar{e}},\ \underline{e}_{mn} \subseteq \underline{e}_m \subseteq \underline{e};\ n=1,\not{n}_m;\ m=1,\not{m}\}$$

definita da

$$\bar{e}_m \equiv \dot\cup_{n=1,\not{n}\langle m\rangle}(\bar{e}_{mn}) \qquad \bar{e} \equiv \dot\cup_{m=1,\not{m}}(\bar{e}_m) \qquad e_m \equiv \dot\cup_{n=1,\not{n}\langle m\rangle}(e_{mn}) \qquad e \equiv \dot\cup_{m=1,\not{m}}(e_m) \quad (48)$$

Come $\mathfrak{N}\langle\underline{\bar{e}}_t\rangle = \infty$ si ha anche $\mathfrak{N}\langle\underline{\bar{e}}_{mn}\rangle = \infty$. Da: prima di (48); seconda di (12); $\mathfrak{N}\langle\underline{\bar{e}}_{mn}\rangle = \infty$; segue $\mathfrak{N}\langle\underline{\bar{e}}_m\rangle = \mathfrak{N}\langle\dot\cup_{n=1,\not{n}\langle m\rangle}(\underline{\bar{e}}_{mn})\rangle = \Sigma_{n=1,\not{n}\langle m\rangle}(\mathfrak{N}\langle\underline{\bar{e}}_{mn}\rangle) = \not{n}_m\cdot\infty$. Da: (24), $\underline{e} \subseteq \underline{\bar{e}}$; (48); seconda di (12), $\mathfrak{N}\langle\underline{\bar{e}}_{mn}\rangle = \infty$; (24), $\underline{e}_{mn} \subseteq \underline{\bar{e}}_{mn}$, $\not{t} = \Sigma_{m=1,\not{m}}(\not{n}_m)$; segue

$$\rho\langle e \mid \bar{e}\rangle = \mathfrak{N}\langle\underline{e}\rangle / \mathfrak{N}\langle\underline{\bar{e}}\rangle = \mathfrak{N}\langle\dot\cup_{m=1,\not{m}}(\dot\cup_{n=1,\not{n}\langle m\rangle}(\underline{e}_{mn}))\rangle / \mathfrak{N}\langle\dot\cup_{m=1,\not{m}}(\dot\cup_{n=1,\not{n}\langle m\rangle}(\underline{\bar{e}}_{mn}))\rangle = \Sigma_{m=1,\not{m}}(\Sigma_{n=1,\not{n}\langle m\rangle}(\mathfrak{N}\langle\underline{e}_{mn}\rangle / \mathfrak{N}\langle\underline{\bar{e}}_{mn}\rangle)) / \Sigma_{m=1,\not{m}}(\not{n}_m) =$$

$$\not{t}^{-1}\cdot\Sigma_{m=1,\not{m}}(\Sigma_{n=1,\not{n}\langle m\rangle}(\rho\langle e_{mn} \mid \bar{e}_{mn}\rangle)) = \not{t}^{-1}\cdot\Sigma_{m=1,\not{m}}(\not{n}_m\cdot\rho\langle e_m \mid \bar{e}_m\rangle) \quad (49)$$

il cui ultimo membro è dovuto a

$$\rho\langle e_m \mid \bar{e}_m\rangle = \not{n}_m^{-1}\cdot\Sigma_{n=1,\not{n}\langle m\rangle}(\rho\langle e_{mn} \mid \bar{e}_{mn}\rangle)$$

che si deduce nel modo evidentemente analogo.

Le (46), (45) e (49) portano

$$\mathfrak{C}\langle\bar{e}_\smile\rangle \equiv \mathfrak{C}\langle\bar{e}\rangle \underline{\rightarrow} \{\mathfrak{P}\langle e\rangle = \not{t}^{-1}\cdot\Sigma_{m=1,\not{m}}(\Sigma_{n=1,\not{n}\langle m\rangle}(\rho\langle e_{mn} \mid \bar{e}_{mn}\rangle)) = \not{t}^{-1}\cdot\Sigma_{m=1,\not{m}}(\not{n}_m\cdot\rho\langle e_m \mid \bar{e}_m\rangle)\} \quad (50)$$

Si intende $\{\bar{e}_A, \bar{e}_B\} \subseteq \underline{I}$ e quindi $\{\underline{\bar{e}}_A \subseteq \underline{\bar{e}}_\smile, \underline{\bar{e}}_B \subseteq \underline{\bar{e}}_\smile\}$ che, coerentemente con prima di (18) dà luogo a $\mathcal{B}\langle\bar{e}_\smile\rangle \underline{\rightarrow} \neg\mathbb{I}\langle\bar{e}_A, \bar{e}_B\rangle$ che per (3) porta $\mathbb{I}\langle\bar{e}_A, \bar{e}_B\rangle \underline{\rightarrow} \neg\mathcal{B}\langle\bar{e}_\smile\rangle$. Inoltre l'avere dedotto $\bar{e} \equiv \bar{e}_\smile$ sottintendendo $\mathcal{B}\langle\bar{e}_\smile\rangle$ equivale, per (1), a $\{\bar{e} \equiv \bar{e}_\smile\} \equiv \{\bar{e} \equiv \bar{e}_\smile \mid \mathcal{B}\langle\bar{e}_\smile\rangle\}$ che equivale, per (3), a $\neg\mathcal{B}\langle\bar{e}_\smile\rangle \underline{\rightarrow} \neg\{\bar{e} \equiv \bar{e}_\smile\}$. Ciò dà luogo a $\mathbb{I}\langle\bar{e}_A, \bar{e}_B\rangle \underline{\rightarrow} \{\bar{e} \ne \bar{e}_\smile\}$ per cui gli elementi di $\underline{I}$ si raggruppano in base alla reciproca indipendenza ponendo la

$$\underline{I} \equiv \{\{\bar{e}_{mn};\ n=1,\not{n}_m;\ m=1,\not{m}\} \mid \neg\mathbb{I}\langle\bar{e}_{mh}, \bar{e}_{mk}\rangle, \{\mathbb{I}\langle\bar{e}_{ah}, \bar{e}_{bk}\rangle;\ \forall a \ne b\}\} \quad (51)$$

di cui (51) $\underline{\rightarrow} \{\bar{e} \ne \bar{e}_\smile\}$ il cui secondo membro è vero solo se si ignora $\bar{e}_\smile$.

Perciò (51) (come anche tutto ciò che se ne deduce) è vigente solo se $\bar{e} \ne \bar{e}_\smile$ i.e. si ignora $\bar{e}_\smile$ i.e. si ignorano seconda e ultima di (48) nonché le $\{\underline{\bar{e}}_m \subseteq \underline{\bar{e}}, \underline{e}_m \subseteq \underline{e};\ m=1,\not{m}\}$ da esse implicate.

La $\{\mathbb{I}\langle\bar{e}_{ah}, \bar{e}_{bk}\rangle;\ \forall a \ne b\}$ di (51) porta $\mathbb{I}\langle\bar{e}_m;\ m=1,\not{m}\rangle$ che per ultima di (18) e $\underline{e}_m \subseteq \underline{\bar{e}}_m$ porta $\mathbb{I}\langle e_m;\ m=1,\not{m}\rangle$.

3.1 Una conferma

La (23) ha, coerentemente con (51), la specificazione

$$\ddot{e}_\wedge \equiv \wedge_{m=1,\not{m}}(\ddot{e}_m) \equiv \cap_{m=1,\not{m}}(\wedge_{\mathit{m}=1,\not{m}}(\ddot{\bar{e}}_{m\mathit{m}})) \qquad \ddot{e}_\vee \equiv \vee_{m=1,\not{m}}(\ddot{e}_m) \equiv \cup_{m=1,\not{m}}(\wedge_{\mathit{m}=1,\not{m}}(\ddot{\bar{e}}_{m\mathit{m}})) \quad (52)$$

di cui $\ddot{e}_m \equiv \{\mathrm{X} \in \mathfrak{R}_m\}_m$, $\{\ddot{\bar{e}}_{m\mathit{m}} \equiv \bar{e}_{\mathit{m}};\ \forall \mathit{m} \ne m\}$, $\ddot{\bar{e}}_{mm} \equiv \ddot{e}_m$, $\underline{\ddot{e}}_\wedge \subseteq \underline{\ddot{e}}_\vee \subseteq \underline{\bar{E}}$, essendo in particolare $\bar{E}$, di cui $\bar{E} \equiv \wedge_{m=1,\not{m}}(\bar{e}_m)$, la specificazione di $C_\wedge$ e valendo quindi $\bar{E} \equiv \vee_{m=1,\not{m}}(\bar{e}_m)$ se $\mathcal{B}\langle\bar{E}\rangle$ come è sottinteso in questa sezione.

L'evidente $\mathbb{I}\langle e_m;\ m=1,\not{m}\rangle \underline{\rightarrow} \mathbb{I}\langle\ddot{e}_m;\ m=1,\not{m}\rangle$ e la detta $\mathbb{I}\langle e_m;\ m=1,\not{m}\rangle$ portano $\mathbb{I}\langle\ddot{e}_m;\ m=1,\not{m}\rangle$. Questa e (26) implicano

$$\rho\langle \ddot{e}_\wedge \mid \bar{E}\rangle = \mathfrak{N}\langle \underline{\ddot{e}}_\wedge\rangle / \mathfrak{N}\langle \underline{\bar{E}}\rangle = \Pi_{m=1,\cancel{m}}(\mathfrak{N}\langle \underline{\ddot{e}}_m\rangle / \mathfrak{N}\langle \underline{\bar{e}}_m\rangle) = \Pi_{m=1,\cancel{m}}(\rho\langle \ddot{e}_m \mid \bar{e}_m\rangle) \tag{53}$$

Da: ultima di (24); prima di (8); (53), $\neg\ddot{e}_m \equiv \{X \in \neg\underline{\mathcal{R}}_m\}_m$ di cui $\neg\underline{\mathcal{R}}_m \equiv \underline{\mathcal{R}} - \underline{\mathcal{R}}_m$ (come si deduce da $\mathcal{B}\langle\bar{E}\rangle$ e (37)); segue

$$\rho\langle \ddot{e}_\vee \mid \bar{E}\rangle = 1 - \rho\langle \neg\ddot{e}_\vee \mid \bar{E}\rangle = 1 - \rho\langle \wedge_{m=1,\cancel{m}}(\neg\ddot{e}_m) \mid \bar{E}\rangle = 1 - \Pi_{m=1,\cancel{m}}(\rho\langle \neg\ddot{e}_m \mid \bar{e}_m\rangle) = 1 - \Pi_{m=1,\cancel{m}}(1 - \rho\langle \ddot{e}_m \mid \bar{e}_m\rangle) \tag{54}$$

Da: seconda di (52); $\underline{\ddot{e}}_\wedge = \Pi_{m=1,\cancel{m}}(\underline{\ddot{e}}_m)$ (dovuta a $\mathbb{I}\langle \ddot{e}_m; m=1,\cancel{m}\rangle$ e (22)); (12), l'essere vero il primo membro di (13) quando i $\{\underline{\triangle}_{hk}; h=1,\cancel{h}; k=1,\cancel{k}\}$ siano specificati da $\{\underline{\ddot{\mathbb{e}}}_{\underline{m}\langle c,b,a\rangle m}; a=1,c; m=1,\cancel{m}\}$; $\mathfrak{N}\langle \Pi_{k=1,\cancel{k}}(\underline{A}_k)\rangle = \Pi_{k=1,\cancel{k}}(\mathfrak{N}\langle \underline{A}_k\rangle)$, $\{\ddot{\mathbb{e}}_{mm} \equiv \bar{e}_m; \forall m \neq m\}$, $\ddot{\mathbb{e}}_{mm} \equiv \ddot{e}_m$; segue

$$\mathfrak{N}\langle \underline{\ddot{e}}_\vee\rangle = \mathfrak{N}\langle \cup_{m=1,\cancel{m}}(\underline{\mathbb{M}}\langle \wedge_{m=1,\cancel{m}}(\underline{\ddot{\mathbb{e}}}_{mm})\rangle)\rangle = \mathfrak{N}\langle \cup_{m=1,\cancel{m}}(\Pi_{m=1,\cancel{m}}(\underline{\ddot{\mathbb{e}}}_{mm}))\rangle = \Sigma_{c=1,\cancel{m}}((-1)^{c+1}\cdot\Sigma_{b=1,Б\langle\cancel{m},c\rangle}(\mathfrak{N}\langle \Pi_{m=1,\cancel{m}}(\cap_{a=1,c}(\underline{\ddot{\mathbb{e}}}_{\underline{m}\langle c,b,a\rangle m}))\rangle)) =$$

$$\Sigma_{c=1,\cancel{m}}((-1)^{c+1}\cdot\Sigma_{b=1,Б\langle\cancel{m},c\rangle}(\Pi_{a=1,c}(\mathfrak{N}\langle \underline{\ddot{e}}_{\underline{m}\langle c,b,a\rangle}\rangle)\cdot\Pi_{a=c+1,\cancel{m}}(\mathfrak{N}\langle \underline{\bar{e}}_{K\langle c,b,a\rangle}\rangle))) \tag{55}$$

di cui $\{K_{cba}; a=c+1,\cancel{m}\} = \{m=1,\cancel{m}\} - \{\underline{m}\langle c,b,a\rangle; a=1,c\}$.

Da: $\underline{\ddot{e}}_\vee \subseteq \underline{\bar{E}}$, (24); (55), $\mathfrak{N}\langle \underline{\bar{E}}\rangle = \Pi_{m=1,\cancel{m}}(\mathfrak{N}\langle \underline{\bar{e}}_m\rangle)$ (dovuta a $\mathfrak{N}\langle \underline{\ddot{e}}_\wedge\rangle = \Pi_{m=1,\cancel{m}}(\mathfrak{N}\langle \underline{\ddot{e}}_m\rangle$ che è implicata da $\mathbb{I}\langle e_m; m=1,\cancel{m}\rangle$ e (22)); $\underline{\ddot{e}}_m \subseteq \underline{\bar{e}}_m$, (24); segue

$$\rho\langle \ddot{e}_\vee \mid \bar{E}\rangle = \mathfrak{N}\langle \underline{\ddot{e}}_\vee\rangle / \mathfrak{N}\langle \underline{\bar{E}}\rangle = \Sigma_{c=1,\cancel{m}}((-1)^{c+1}\cdot\Sigma_{b=1,Б\langle\cancel{m},c\rangle}(\Pi_{a=1,c}(\mathfrak{N}\langle \underline{\ddot{e}}_{\underline{m}\langle c,b,a\rangle}\rangle / \mathfrak{N}\langle \underline{\bar{e}}_{\underline{m}\langle c,b,a\rangle}\rangle))) =$$

$$\Sigma_{c=1,\cancel{m}}((-1)^{c+1}\cdot\Sigma_{b=1,Б\langle\cancel{m},c\rangle}(\Pi_{a=1,c}(\rho\langle \ddot{e}_{\underline{m}\langle c,b,a\rangle} \mid \bar{e}_{\underline{m}\langle c,b,a\rangle}\rangle))) \tag{56}$$

È notevole la diversità tra (54) e (56) nell'esprimere lo stesso $\rho\langle \ddot{e}_\vee \mid \bar{E}\rangle$, come pure l'essere la prima numericamente molto più conveniente poiché la seconda richiede un tempo di calcolo che al crescere di $\cancel{m}$ diviene presto difficilmente disponibile. Inoltre, intendendo $\cup\underline{A} \equiv \cup_{k=1,\cancel{k}}(\underline{A}_k)$, la proprietà associativa dell'unione porta $\cup\underline{A} = \{\ldots\{\{\underline{A}_1 \cup \underline{A}_2\} \cup \underline{A}_3\} \cup \ldots\underline{A}_{\cancel{k}}\}$, per cui $\cup\underline{A}$ è il risultato di una successione di $\cancel{k} - 1$ unioni tra due insiemi e quindi ognuna del tipo $\underline{A} \cup \underline{B}$ di cui $\mathfrak{N}\langle \underline{A} \cup \underline{B}\rangle = \mathfrak{N}\langle \underline{A}\rangle + \mathfrak{N}\langle \underline{B}\rangle - \mathfrak{N}\langle \underline{A} \cap \underline{B}\rangle$ (dovuta a prima di (12)). Pertanto $\mathfrak{N}\langle \cup\underline{A}\rangle$ può essere definita iterativamente ponendo inizialmente $\mathfrak{N}\langle \cup\underline{A}\rangle = \mathfrak{N}\langle \underline{A}_1\rangle$ e compiendo poi i passi indicati da $\{k; k=2,\cancel{k}\}$ e costituiti dal sostituire al k-esimo passo $\mathfrak{N}\langle \cup\underline{A}\rangle$ con $\mathfrak{N}\langle \cup\underline{A}\rangle + \mathfrak{N}\langle \underline{A}_k\rangle - \mathfrak{N}\langle \cup\underline{A} \cap \underline{A}_k\rangle$. L'evidente analogia, tra prima di (12) (cui sono alternative le iterazioni testé dette) e (56), fa dedurre, come alternativa a questa espressione di $\rho\langle \ddot{e}_\vee \mid \bar{E}\rangle$, la seguente procedura: si pone $P = \rho\langle \ddot{e}_1 \mid \bar{e}_1\rangle$, si compiono i passi indicati da $\{m=2,\cancel{m}\}$ e costituiti dal sostituire P con $P + \rho\langle \ddot{e}_m \mid \bar{e}_m\rangle - P\cdot\rho\langle \ddot{e}_m \mid \bar{e}_m\rangle$ nell'm-esimo passo, si pone $\rho\langle \ddot{e}_\vee \mid \bar{E}\rangle = P$ al termine di tali passi. Il tempo di calcolo richiesto da questa procedura è molto prossimo a quello di (54).

Un $\mathbb{C}\langle \underline{\ddot{e}}_\wedge\rangle$ (come pure un $\mathbb{C}\langle \underline{\ddot{e}}_\vee\rangle$) è una $\cancel{m}$-pla $\{\mathbb{C}\langle \underline{\ddot{e}}_m\rangle; m=1,\cancel{m}\}$ elemento di $\underline{\bar{E}}$ e quindi, essendo X una costante (e trascurando come impossibile ogni $\{\ddot{e}_\wedge \mid \cap_{m=1,\cancel{m}}(\underline{\mathcal{R}}_m) = \varnothing\}$), implica un $\mathbb{C}\langle \underline{\ddot{e}}_\cap\rangle$ di cui $\ddot{e}_\cap \equiv \{X \in \cap_{m=1,\cancel{m}}(\underline{\mathcal{R}}_m)\}$. Perciò si ha $\ddot{e}_\wedge \twoheadrightarrow \ddot{e}_\cap$ che, per (28) e se $\mathbb{C}\langle\bar{E}\rangle$, dà luogo a $\rho\langle \ddot{e}_\wedge \mid \bar{E}\rangle \leq \mathbb{P}\langle \ddot{e}_\cap\rangle$ i.e. $\mathbb{P}\langle \ddot{e}_\cap\rangle \in [\rho\langle \ddot{e}_\wedge \mid \bar{E}\rangle, 1]$.

Come queste si hanno anche $\ddot{e}_{\wedge p} \twoheadrightarrow \ddot{e}_\cap$ e $\mathbb{P}\langle \ddot{e}_\cap\rangle \in [P_{\wedge p}, 1]$ di cui $\ddot{e}_{\wedge p} \equiv \wedge_{m=1,\cancel{m}}(\ddot{e}_{mp})$, $P_{\wedge p} \equiv \rho\langle \ddot{e}_{\wedge p} \mid \bar{E}\rangle$, $\ddot{e}_{mp} \equiv \{X \in \underline{\mathcal{R}}_{\mu\langle p,m\rangle}\}_m$ con $\{\mu_{pm}; m=1,\cancel{m}\}$ la p-esima delle $\cancel{m}!$ permutazioni dei $\{m=1,\cancel{m}\}$.

Se i $\{\ddot{e}_{\wedge p}; p=1,\cancel{m}!\}$ potessero essere concomitanti (i.e. congiunti) e indipendenti, come è indicato dalle $\wedge_{p=1,\cancel{m}!}(\ddot{e}_{\wedge p})$ e $\mathbb{I}\langle \ddot{e}_{\wedge p}; p=1,\cancel{m}!\rangle$, allora si potrebbe considerare $\wedge_{p=1,\cancel{m}!}(\ddot{e}_{\wedge p} \twoheadrightarrow \ddot{e}_\cap)$ che consentirebbe di stabilire $\ddot{e}_{\wedge \cancel{p}} \twoheadrightarrow \ddot{e}_\cap$ di cui $\cancel{p} \equiv \{p \mid P_{\wedge p} = \max\langle P_{\wedge p}; p=1,\cancel{m}!\rangle\}$ e che in base a (28) consentirebbe di dedurre $\mathbb{P}\langle \ddot{e}_\cap\rangle \in [\rho\langle \ddot{e}_{\wedge \cancel{p}} \mid \bar{E}\rangle, 1]$ se $\mathbb{C}\langle\bar{E}\rangle$.

Però $\mathcal{B}\langle\bar{E}\rangle$, $\{\underline{\ddot{e}}_{\wedge p} \subseteq \underline{\bar{E}}; p=1,\cancel{m}!\}$ e seconda di (20) implicano che la detta concomitanza non è rappresentabile da $\wedge_{p=1,\cancel{m}!}(\ddot{e}_{\wedge p})$, ma deve invece essere rappresentata da $\cap_{p=1,\cancel{m}!}(\ddot{e}_{\wedge p})$. Inoltre $\mathcal{B}\langle\bar{E}\rangle$, $\{\underline{\ddot{e}}_{\wedge p} \subseteq \underline{\bar{E}}; p=1,\cancel{m}!\}$ e prima di (18) implicano $\neg\mathbb{I}\langle \ddot{e}_{\wedge p}; p=1,\cancel{m}!\rangle$. Infine, in base a (13) e seconda di (36), è deducibile l'equivalenza tra $\cap_{p=1,\cancel{m}!}(\ddot{e}_{\wedge p})$ e $\wedge_{m=1,\cancel{m}}(\ddot{e}_{\cap m})$ e quindi la concomitanza in oggetto è discrezionalmente eliminabile per mezzo del ridurre la complessità del primo al solo e mero secondo.

Per questi motivi si esclude $\wedge_{p=1,\cancel{m}!}(\ddot{e}_{\wedge p} \twoheadrightarrow \ddot{e}_\cap)$ e si ammette invece $\dot{\vee}_{p=1,\cancel{m}!}(\ddot{e}_{\wedge p} \twoheadrightarrow \ddot{e}_\cap)$. Quindi, corrispondendo $\mathbb{P}\langle \ddot{e}_\cap\rangle \in [P_{\wedge p}, 1]$ a ogni $\ddot{e}_{\wedge p} \twoheadrightarrow \ddot{e}_\cap$, si ha $\dot{\vee}_{p=1,\cancel{m}!}(\mathbb{P}\langle \ddot{e}_\cap\rangle \in [P_{\wedge p}, 1])$. Da: seconda di (9); $\mathbb{P}\langle \ddot{e}_\cap\rangle \in [0,1]$, $P_{\wedge p} \in [0,1]$; $\wedge_{k=1,\cancel{k}}(B \in \underline{A}_k) \equiv B \in \cap_{k=1,\cancel{k}}(\underline{A}_k)$; segue

$$\dot{\vee}_{p=1,\cancel{m}!}(\mathbb{P}\langle \ddot{e}_\cap\rangle \in [P_{\wedge p}, 1]) \underline{\rightarrow} \neg\wedge_{p=1,\cancel{m}!}(\neg\mathbb{P}\langle \ddot{e}_\cap\rangle \in [P_{\wedge p}, 1]) \equiv \neg\wedge_{p=1,\cancel{m}!}(\mathbb{P}\langle \ddot{e}_\cap\rangle \in [0, P_{\wedge p})) \equiv \neg\mathbb{P}\langle \ddot{e}_\cap\rangle \in \cap_{p=1,\cancel{m}!}([0, P_{\wedge p})) \equiv \neg\mathbb{P}\langle \ddot{e}_\cap\rangle \in [0, P_{\wedge \cancel{P}}) \equiv$$

$$\mathbb{P}\langle \ddot{e}_\cap\rangle \in [P_{\wedge \cancel{P}}, 1]$$

di cui $\cancel{P} \equiv \{p \mid P_{\wedge p} = \min\langle P_{\wedge p}; p=1,\cancel{m}!\rangle\}$.

Pertanto nel seguito è implicito che $\ddot{e}_\wedge$, allo scopo di ottenere $\mathbb{P}\langle \ddot{e}_\cap\rangle \in [P_{\wedge \cancel{P}}, 1]$ i.e. $\rho\langle \ddot{e}_{\wedge \cancel{P}} \mid \bar{E}\rangle \leq \mathbb{P}\langle \ddot{e}_\cap\rangle$, è sostituito da $\ddot{e}_{\wedge \cancel{P}}$. Quindi $Æ\langle \wedge_{m=1,\cancel{m}}(\neg\ddot{e}_m) / \ddot{e}_\wedge\rangle$ (per cui si applica a $\wedge_{m=1,\cancel{m}}(\neg\ddot{e}_m)$ la sostituzione analoga a quella testé detta per $\ddot{e}_\wedge$) e prima di (8) implicano che $\neg\ddot{e}_\vee$ è sostituito da $\neg\ddot{e}_{\vee \cancel{P}}$ di cui $\neg\ddot{e}_{\vee p} \equiv \wedge_{m=1,\cancel{m}}(\neg\ddot{e}_{mp})$, $\cancel{P} \equiv \{p \mid P_{\vee p}{}^{\neg} = \min\langle P_{\vee p}{}^{\neg}; p=1,\cancel{m}!\rangle\}$, $P_{\vee p}{}^{\neg} \equiv \rho\langle \neg\ddot{e}_{\vee p} \mid \bar{E}\rangle$, e quindi che $\ddot{e}_\vee$ è sostituito da $\ddot{e}_{\vee \cancel{P}}$.

Coerentemente con ultima di (24) si ha $P_{\vee \cancel{P}} = 1 - P_{\vee \cancel{P}}{}^{\neg}$ di cui $P_{\vee p} \equiv \rho\langle \ddot{e}_{\vee p} \mid \bar{E}\rangle$, $\ddot{e}_{\vee p} \equiv \vee_{m=1,\cancel{m}}(\ddot{e}_{mp})$. Ciò e l'essere $P_{\vee \cancel{P}}{}^{\neg}$ un minimo implicano che $P_{\vee \cancel{P}}$ è un massimo e quindi danno luogo a $\cancel{P} \equiv \{p \mid P_{\vee p} = \max\langle P_{\vee p}; p=1,\cancel{m}!\rangle\}$. Allo stesso modo da (24) e seconda di (8) segue a $P_{\wedge \cancel{P}} = 1 - P_{\wedge \cancel{P}}{}^{\neg}$ di cui $P_{\wedge p}{}^{\neg} \equiv \rho\langle \neg\ddot{e}_{\wedge p} \mid \bar{E}\rangle$, $\neg\ddot{e}_{\wedge p} \equiv \vee_{m=1,\cancel{m}}(\neg\ddot{e}_{mp})$. Ciò e l'essere $P_{\wedge \cancel{P}}$ un minimo implicano che $P_{\wedge \cancel{P}}{}^{\neg}$ è un massimo e quindi danno luogo a $\cancel{P} \equiv \{p \mid P_{\wedge p}{}^{\neg} = \max\langle P_{\wedge p}{}^{\neg}; p=1,\cancel{m}!\rangle\}$.

La $\underline{\ddot{e}}_\wedge \subseteq \underline{\ddot{e}}_\vee$ (detta in occasione di (52)) porta $P_{\wedge \cancel{P}} \leq P_{\vee \cancel{P}}$. Questa e l'essere $P_{\wedge \cancel{P}}$ un minimo portano $P_{\wedge \cancel{P}} \leq P_{\vee \cancel{P}}$. Questa non contraddice la $\underline{\ddot{e}}_\wedge \subseteq \underline{\ddot{e}}_\vee$ che si ha con le dette sostituzioni di $\ddot{e}_\wedge$ con $\ddot{e}_{\wedge \cancel{P}}$ e di $\ddot{e}_\vee$ con $\ddot{e}_{\vee \cancel{P}}$.

Essendo quindi conservate le proprietà di $\{\ddot{e}_{\wedge},\ddot{e}_{\vee}\}$ dalla sua implicita sostituzione con $\{\ddot{e}_{\wedge\text{Ᵽ}},\ddot{e}_{\vee\text{Ᵽ}}\}$, (53) e (54) sono sostituite da

$$\rho\langle \ddot{e}_{\wedge} ¦ \bar{E}\rangle = \Pi_{m=1,\text{₥}}(\rho\langle \{ X\in\underline{\mathfrak{R}}_{\mu\langle \text{Ᵽ},m\rangle}\}_{m} ¦ \bar{e}_{m}\rangle) \qquad \rho\langle \ddot{e}_{\vee} ¦ \bar{E}\rangle = 1-\Pi_{m=1,\text{₥}}(\rho\langle \{ X\in\neg\underline{\mathfrak{R}}_{\mu\langle \text{Ᵽ},m\rangle}\}_{m} ¦ \bar{e}_{m}\rangle) \tag{57}$$

dove Ᵽ e Ᵽ sono rispettivamente un p che minimizza $\Pi_{m=1,\text{₥}}(\rho\langle \{ X\in\underline{\mathfrak{R}}_{\mu\langle p,m\rangle}\}_{m} ¦ \bar{e}_{m}\rangle)$ e $\Pi_{m=1,\text{₥}}(\rho\langle \{ X\in\neg\underline{\mathfrak{R}}_{\mu\langle p,m\rangle}\}_{m} ¦ \bar{e}_{m}\rangle)$.

Si pone $\ddot{e}_{\cup}\equiv\{ X\in\cup_{m=1,\text{₥}}(\underline{\mathfrak{R}}_{m})\}$. Da: seconda di (37), (8); sostituzione di $\underline{\mathfrak{R}}_{m}$ con $\neg\underline{\mathfrak{R}}_{m}$ in $\neg\ddot{e}_{\cap}\twoheadrightarrow\neg\ddot{e}_{\wedge}$ (dovuta a $\ddot{e}_{\wedge}\twoheadrightarrow\ddot{e}_{\cap}$ e (3)); (8); segue $\ddot{e}_{\cup}\equiv\neg\{ X\in\cap_{m=1,\text{₥}}(\neg\underline{\mathfrak{R}}_{m})\}\twoheadrightarrow\neg\wedge_{m=1,\text{₥}}(\neg\ddot{e}_{m})\equiv\ddot{e}_{\vee}$. La $\ddot{e}_{\cup}\twoheadrightarrow\ddot{e}_{\vee}$ è la (3.1.21) di [1] ed è implicata anche da (3) e $\neg\ddot{e}_{\vee}\twoheadrightarrow\neg\ddot{e}_{\cup}$ che si deduce analogamente a $\ddot{e}_{\wedge}\twoheadrightarrow\ddot{e}_{\cap}$.

La $\cap_{m=1,\text{₥}}(\neg\underline{\mathfrak{R}}_{m})\neq\varnothing$ di $\neg\wedge_{m=1,\text{₥}}(\{ X\in\neg\underline{\mathfrak{R}}_{m}\}_{m})\equiv\ddot{e}_{\vee}$ (analoga a $\cap_{m=1,\text{₥}}(\underline{\mathfrak{R}}_{m})\neq\varnothing$ di $\ddot{e}_{\wedge}$) equivale, per (8), al dover sottintendere anche $\cup_{m=1,\text{₥}}(\underline{\mathfrak{R}}_{m})\neq\neg\varnothing$ inerente $\ddot{e}_{\vee}$, ma questa condizione è ovviamente sempre conseguita poiché $\neg\varnothing$ è l'insieme che contiene ogni insieme.

Il nome (e quindi le proprietà) di un $\mathfrak{E}\langle\ddot{e}_{\vee}\rangle$ è l'addizione dei nomi degli elementi di tale ₥-pla. Le (52) mostrano $\underline{\ddot{e}}_{\vee}=\underline{\ddot{e}}_{\wedge}+\underline{E}$ tale che una ₥-pla $\mathfrak{E}\langle\underline{E}\rangle$ può essere contraddittoria in quanto può accadere che alcuni nomi dei suoi ₥ elementi affermano e i restanti negano che X cade in una certa $\underline{\mathfrak{R}}_{m}$. Ciò porta che una tale $\mathfrak{E}\langle\underline{E}\rangle$ non può implicare un $\mathfrak{E}\langle\underline{\ddot{e}}_{\cup}\rangle$, e quindi evidenzia l'erroneità di $\ddot{e}_{\vee}\twoheadrightarrow\ddot{e}_{\cup}$ che, in base a (37), (8) e (3), equivarrebbe a $\ddot{e}_{\cap}\twoheadrightarrow\ddot{e}_{\wedge}$.

I $\{\ddot{E}_{\wedge k};\, k=1,\text{ꝁ}\}$, di cui $\ddot{E}_{\wedge k}\equiv\wedge_{m=1,\text{₥}}(\{ X\in\underline{\mathfrak{R}}_{mk}\}_{m})$ e $\cap_{m=1,\text{₥}}(\underline{\mathfrak{R}}_{mk})=\cap_{m=1,\text{₥}}(\underline{\mathfrak{R}}_{m})$, verificano, analogamente a $\ddot{e}_{\wedge}$ di cui sono specificazioni, $\{\underline{\ddot{E}}_{\wedge k}\subseteq\underline{\bar{E}},\ddot{E}_{\wedge k}\twoheadrightarrow\ddot{e}_{\cap};\, k=1,\text{ꝁ}\}$. Però non si accetta in base a (21) $_{\cup}\ddot{E}_{\wedge}\twoheadrightarrow\ddot{e}_{\cap}$ (né $_{\cup}\ddot{E}_{\wedge}\equiv\ddot{e}_{\cap}$) di cui $_{\cup}\ddot{E}_{\wedge}\equiv\cup_{k=1,\text{ꝁ}}(\ddot{E}_{\wedge k})$, poiché, essendo anche $\mathfrak{E}\langle{}_{\cup}\underline{\ddot{E}}_{\wedge}\rangle$ una ₥-pla elemento di $\underline{\bar{E}}$, non sussiste necessariamente l'inerente specificazione di $\mathcal{E}_{3}$ cioè la condizione per cui le proprietà di ogni $\mathfrak{E}\langle{}_{\cup}\underline{\ddot{E}}_{\wedge}\rangle$, determinate dal considerare tutti i $\{\ddot{E}_{\wedge k};\, k=1,\text{ꝁ}\}$, sono concordi nell'implicare un $\mathfrak{E}\langle\underline{\ddot{e}}_{\cap}\rangle$. Tali $_{\cup}\ddot{E}_{\wedge}\twoheadrightarrow\ddot{e}_{\cap}$ e $_{\cup}\ddot{E}_{\wedge}\equiv\ddot{e}_{\cap}$ non sono accettate anche perché per i $\{\ddot{E}_{\wedge k};\, k=1,\text{ꝁ}\}$ si hanno le evidenti considerazioni analoghe a quelle che sopra hanno indotto a trascurare $\wedge_{p=1,\text{₥}!}(\ddot{e}_{\wedge p})$ e considerare $\dot{\vee}_{p=1,\text{₥}!}(\ddot{e}_{\wedge p})$. Inoltre i $\{\ddot{E}_{\wedge k}\twoheadrightarrow\ddot{e}_{\cap};\, k=1,\text{ꝁ}\}$ evidenziano che $\ddot{e}_{\wedge}\twoheadrightarrow\ddot{e}_{\cap}$ e (21) non sono sufficienti per $\ddot{e}_{\wedge}\equiv\ddot{e}_{\cap}$ poiché non è ottenibile vera la specificazione di $\mathcal{E}_{2}$.

Le $\neg\ddot{e}_{\vee}\twoheadrightarrow\neg\ddot{e}_{\cup}$ e (21) non sono sufficienti per $\neg\ddot{e}_{\vee}\equiv\neg\ddot{e}_{\cup}$, poiché una sola $\wedge_{m=1,\text{₥}}(\ddot{\mathbb{e}}_{mm}{}^{\neg})\twoheadrightarrow\neg\ddot{e}_{\cup}$, di cui $\{\ddot{\mathbb{e}}_{mm}{}^{\neg}\equiv\bar{e}_{m};\,\forall m\neq \mathrm{m}\}$ e $\ddot{\mathbb{e}}_{mm}{}^{\neg}\equiv\neg\ddot{e}_{\cup}$, basta per impedire la specificazione di $\mathcal{E}_{2}$, notando a questo riguardo anche che una $\neg\ddot{e}_{\vee}\cup\wedge_{m=1,\text{₥}}(\ddot{\mathbb{e}}_{mm}{}^{\neg})\twoheadrightarrow\neg\ddot{e}_{\cup}$ è impedita dall'assenza della specificazione di $\mathcal{E}_{3}$.

Da $\ddot{e}_{\wedge}\twoheadrightarrow\ddot{e}_{\cap}$ si deduce (per (28) e se $\mathfrak{C}\langle\bar{E}\rangle$) $\rho\langle\ddot{e}_{\wedge} ¦ \bar{E}\rangle\leq\mathbb{P}\langle\ddot{e}_{\cap}\rangle$, ma non si ha una analoga di (28) per dedurre da $\ddot{e}_{\cup}\twoheadrightarrow\ddot{e}_{\vee}$ una limitazione superiore di $\mathbb{P}\langle\ddot{e}_{\cup}\rangle$. Tuttavia anche questa limitazione può essere conseguita come segue. La $\neg\ddot{e}_{\vee}\twoheadrightarrow\neg\ddot{e}_{\cup}$ porta, per (28) e se $\mathfrak{C}\langle\bar{E}\rangle$, $\rho\langle\neg\ddot{e}_{\vee} ¦ \bar{E}\rangle\leq\mathbb{P}\langle\neg\ddot{e}_{\cup}\rangle$. Questa, per ultima di (24), equivale a $1-\rho\langle\ddot{e}_{\vee} ¦ \bar{E}\rangle\leq 1-\mathbb{P}\langle\ddot{e}_{\cup}\rangle$ che mostra $\mathbb{P}\langle\ddot{e}_{\cup}\rangle\leq\rho\langle\ddot{e}_{\vee} ¦ \bar{E}\rangle$. Pertanto si hanno entrambe le $\rho\langle\ddot{e}_{\wedge} ¦ \bar{E}\rangle=1-\rho\langle\neg\ddot{e}_{\wedge} ¦ \bar{E}\rangle\leq\mathbb{P}\langle\ddot{e}_{\cap}\rangle$ e $\mathbb{P}\langle\ddot{e}_{\cup}\rangle\leq\rho\langle\ddot{e}_{\vee} ¦ \bar{E}\rangle=1-\rho\langle\neg\ddot{e}_{\vee} ¦ \bar{E}\rangle$.

Specificando in queste $\ddot{e}_{\wedge}$ e $\ddot{e}_{\vee}$ come i rispettivi $\ddot{e}_{\wedge\underline{\mathfrak{R}}}$ e $\ddot{e}_{\vee\underline{\mathfrak{R}}}$ di cui $\ddot{e}_{\wedge\underline{\mathfrak{R}}}\equiv\wedge_{m=1,\text{₥}}(\{ X\in\underline{A}_{m}\}_{m})$, $\cap_{m=1,\text{₥}}(\underline{A}_{m})=\underline{\mathfrak{R}}$, $\ddot{e}_{\vee\underline{\mathfrak{R}}}\equiv\vee_{m=1,\text{₥}}(\{ X\in\underline{B}_{m}\}_{m})$, $\cup_{m=1,\text{₥}}(\underline{B}_{m})=\underline{\mathfrak{R}}$, i $\ddot{e}_{\cap}$ e $\ddot{e}_{\cup}$ sono specificati, in base a $e\equiv\{ X\in\underline{\mathfrak{R}}\}\equiv\{\ddot{e}_{\cap}\mid\cap_{m=1,\text{₥}}(\underline{\mathfrak{R}}_{m})=\underline{\mathfrak{R}}\}\equiv\{\ddot{e}_{\cup}\mid\cup_{m=1,\text{₥}}(\underline{\mathfrak{R}}_{m})=\underline{\mathfrak{R}}\}$, entrambi da e, conseguendo

$$\rho\langle\ddot{e}_{\wedge\underline{\mathfrak{R}}} ¦ \bar{E}\rangle=1-\rho\langle\neg\ddot{e}_{\wedge\underline{\mathfrak{R}}} ¦ \bar{E}\rangle\leq\mathbb{P}\langle e\rangle\leq\rho\langle\ddot{e}_{\vee\underline{\mathfrak{R}}} ¦ \bar{E}\rangle=1-\rho\langle\neg\ddot{e}_{\vee\underline{\mathfrak{R}}} ¦ \bar{E}\rangle \tag{58}$$

che ha $\mathfrak{C}\langle\bar{E}\rangle$ come condizione sufficiente, di cui per (8) si ha $\neg\ddot{e}_{\wedge\underline{\mathfrak{R}}}\equiv\vee_{m=1,\text{₥}}(\{ X\in\neg\underline{A}_{m}\}_{m})$ e $\neg\ddot{e}_{\vee\underline{\mathfrak{R}}}\equiv\wedge_{m=1,\text{₥}}(\{ X\in\neg\underline{B}_{m}\}_{m})$, di cui per (8) si ha $\cup_{m=1,\text{₥}}(\neg\underline{A}_{m})=\cap_{m=1,\text{₥}}(\neg\underline{B}_{m})=\neg\underline{\mathfrak{R}}$, e che risulta quindi coerente con (8.4) e (8.5) di [1] se si considera che in quanto testé l'uso di $\underline{A}_{m}$ equivale a usare $\neg\underline{A}_{m}$.

La $\neg\bar{E}\equiv\vee_{m=1,\text{₥}}(\neg\bar{e}_{m})$ e il fatto che $\neg\bar{e}_{m}$ non riguarda in alcun modo X implicano che nessuna relazione tra $\neg\bar{E}$ e e può essere implicata dalle loro proprietà. Perciò, in base all'ultimo capoverso di sezione 2.2 e intendendo $\rho_{A}=\rho\langle\ddot{e}_{\wedge\underline{\mathfrak{R}}} ¦ \bar{E}\rangle$ e $\rho_{B}=\rho\langle\ddot{e}_{\vee\underline{\mathfrak{R}}} ¦ \bar{E}\rangle$, (58) può essere scritta come $\rho_{A}\leq\mathfrak{P}\langle e\rangle\leq\rho_{B}$, di cui $\underline{\rho}_{A}\leq\rho_{A}\leq\bar{\rho}_{A}$ e $\underline{\rho}_{B}\leq\rho_{B}\leq\bar{\rho}_{B}$ in quanto ρ_{A} e ρ_{B} sono variabili dipendenti dalla scelta dei rispettivi $\{\underline{A}_{m};\, m=1,\text{₥}\}$ e $\{\underline{B}_{m};\, m=1,\text{₥}\}$ che peraltro, come evidenzia $\cap_{m=1,\text{₥}}(\underline{A}_{m})=\cup_{m=1,\text{₥}}(\underline{B}_{m})=\underline{\mathfrak{R}}$, sono diversi nel senso che verificano sempre $\{\underline{A}_{m};\, m=1,\text{₥}\}\not\equiv\{\underline{B}_{m};\, m=1,\text{₥}\}$ con la sola eccezione del caso $\{\underline{A}_{m}=\underline{B}_{m}=\underline{\mathfrak{R}};\, m=1,\text{₥}\}$.

Le $\rho_{A}=\rho\langle\ddot{e}_{\wedge\underline{\mathfrak{R}}} ¦ \bar{E}\rangle$ e prima di (57) portano $\rho_{A}=\Pi_{m=1,\text{₥}}(\rho\langle\{ X\in\underline{A}_{\mu\langle \text{Ꝗ},m\rangle}\}_{m} ¦ \bar{e}_{m}\rangle)$ dove Ꝗ è un p che minimizza $\Pi_{m=1,\text{₥}}(\rho\langle\{ X\in\underline{A}_{\mu\langle p,m\rangle}\}_{m} ¦ \bar{e}_{m}\rangle)$. Ciò, $\cap_{m=1,\text{₥}}(\underline{A}_{m})=\underline{\mathfrak{R}}$, $\rho\langle\ddot{e}_{m} ¦ \bar{e}_{m}\rangle=\mathfrak{N}\langle\underline{\ddot{e}}_{m}\rangle/\mathfrak{N}\langle\underline{\bar{e}}_{m}\rangle$ (dovuta a seconda di (24)) e l'essere $\mathfrak{N}\langle\underline{\ddot{e}}_{m}\rangle$ crescente con l'estensione di $\underline{\mathfrak{R}}_{m}$ (dovuta a prima di (36)), $\{ X\in\underline{\mathfrak{R}}\}\equiv e$ e $\{ X\in\underline{\mathbb{R}}\}\equiv\bar{e}$ portano

$$\underline{\rho}_{A}=\{\Pi_{m=1,\text{₥}}(\rho\langle\{ X\in\underline{A}_{\mu\langle \text{Ꝗ},m\rangle}\}_{m} ¦ \bar{e}_{m}\rangle)\mid\underline{A}_{m}=\underline{\mathfrak{R}};\, m=1,\text{₥}\}=\Pi_{m=1,\text{₥}}(\rho\langle e_{m} ¦ \bar{e}_{m}\rangle)$$
$$\bar{\rho}_{A}=\{\Pi_{m=1,\text{₥}}(\rho\langle\{ X\in\underline{A}_{\mu\langle \text{Ꝗ},m\rangle}\}_{m} ¦ \bar{e}_{m}\rangle)\mid\{\underline{A}_{m}=\underline{\mathbb{R}};\,\forall m\neq \text{Ɱ}\},\underline{A}_{\text{Ɱ}}=\underline{\mathfrak{R}}\}=\rho\langle e_{\text{Ɱ}} ¦ \bar{e}_{\text{Ɱ}}\rangle \tag{59}$$

di cui $\text{Ɱ}\equiv\{m\mid\rho\langle e_{m} ¦ \bar{e}_{m}\rangle=\min\langle\rho\langle e_{m} ¦ \bar{e}_{m}\rangle;\, m=1,\text{₥}\rangle\}$.

Le $\rho_{B}=\rho\langle\ddot{e}_{\vee\underline{\mathfrak{R}}} ¦ \bar{E}\rangle$ e seconda di (57) portano $\rho_{B}=1-\Pi_{m=1,\text{₥}}(\rho\langle\{ X\in\neg\underline{B}_{\mu\langle \text{Ꝗ},m\rangle}\}_{m} ¦ \bar{e}_{m}\rangle)$ dove Ꝗ è un p che minimizza $\Pi_{m=1,\text{₥}}(\rho\langle\{ X\in\neg\underline{B}_{\mu\langle p,m\rangle}\}_{m} ¦ \bar{e}_{m}\rangle)$. Ciò, $\cap_{m=1,\text{₥}}(\neg\underline{B}_{m})=\neg\underline{\mathfrak{R}}$ e ultima di (24) portano

$$\underline{\rho}_{B}=1-\{\Pi_{m=1,\text{₥}}(\rho\langle\{ X\in\neg\underline{B}_{\mu\langle \text{Ꝗ},m\rangle}\}_{m} ¦ \bar{e}_{m}\rangle)\mid\{\neg\underline{B}_{m}=\underline{\mathbb{R}};\,\forall m\neq \text{Ɱ}\},\neg\underline{B}_{\text{Ɱ}}=\neg\underline{\mathfrak{R}}\}=1-\rho\langle\neg e_{\text{Ɱ}} ¦ \bar{e}_{\text{Ɱ}}\rangle=\rho\langle e_{\text{Ɱ}} ¦ \bar{e}_{\text{Ɱ}}\rangle \tag{60}$$
$$\bar{\rho}_{B}=1-\{\Pi_{m=1,\text{₥}}(\rho\langle\{ X\in\neg\underline{B}_{\mu\langle \text{Ꝗ},m\rangle}\}_{m} ¦ \bar{e}_{m}\rangle)\mid\neg\underline{B}_{m}=\neg\underline{\mathfrak{R}};\, m=1,\text{₥}\}=1-\Pi_{m=1,\text{₥}}(\rho\langle\neg e_{m} ¦ \bar{e}_{m}\rangle)=1-\Pi_{m=1,\text{₥}}(1-\rho\langle e_{m} ¦ \bar{e}_{m}\rangle)$$

di cui $\text{Ɱ}\equiv\{m\mid\rho\langle\neg e_{m} ¦ \bar{e}_{m}\rangle=\min\langle\rho\langle\neg e_{m} ¦ \bar{e}_{m}\rangle;\, m=1,\text{₥}\rangle\}\equiv\{m\mid\rho\langle e_{m} ¦ \bar{e}_{m}\rangle=\max\langle\rho\langle e_{m} ¦ \bar{e}_{m}\rangle;\, m=1,\text{₥}\rangle$.

La $\ddot{e}_{\wedge}\twoheadrightarrow\ddot{e}_{\cap}$ ha la specificazione $\bar{E}\twoheadrightarrow\bar{e}$. La $\neg\bar{E}\equiv\vee_{m=1,\text{₥}}(\neg\bar{e}_{m})$ (che si ha per (8)) e (14) mostrano $\neg\exists\{\underline{e}\cup\underline{\bar{E}}\neq\underline{\bar{E}}\mid e\twoheadrightarrow\bar{e}\}$. Ciò e (21) danno luogo a $\bar{e}\equiv\bar{E}$.

Questa, $\mathfrak{C}\langle\bar{E}\rangle\underline{\twoheadrightarrow}\{\rho_{A}\leq\mathfrak{P}\langle e\rangle\leq\rho_{B}\}$, $\underline{\rho}_{A}\leq\rho_{A}\leq\bar{\rho}_{A}$, $\underline{\rho}_{B}\leq\rho_{B}\leq\bar{\rho}_{B}$, (59) e (60) portano

$$\mathfrak{C}\langle\bar{E}\rangle \equiv \mathfrak{C}\langle\bar{e}\rangle \underline{\rightarrow} \{\rho\langle e_{M} \mid \bar{e}_{M}\rangle \leq \mathfrak{P}\langle e\rangle \leq \rho\langle e_{M} \mid \bar{e}_{M}\rangle\}\tag{60}$$

Da: $(51) \underline{\rightarrow} \{\bar{e} \not\equiv \bar{e}_{\cup}\}$ (e (3)); segue

$$\{\bar{e} \equiv \bar{e}_{\cup}\} \underline{\rightarrow} \neg(51) \underline{\rightarrow} \neg\{\bar{e} \equiv \bar{E}\}$$

che, per (3), implica

$$\{\bar{e} \equiv \bar{e}_{\cup}\} \equiv \{\bar{e} \equiv \bar{e}_{\cup} \,|\, \bar{e} \not\equiv \bar{E}\} \qquad \{\bar{e} \equiv \bar{E}\} \equiv \{\bar{e} \equiv \bar{E} \,|\, \bar{e} \not\equiv \bar{e}_{\cup}\}$$

Queste rispettivamente mostrano che si ha $\{\bar{e} \equiv \bar{e}_{\cup}\}$ solo se $\bar{e} \not\equiv \bar{E}$ (i.e. solo se si ignora $\bar{E}$) e $\{\bar{e} \equiv \bar{E}\}$ solo se $\bar{e} \not\equiv \bar{e}_{\cup}$ (i.e. solo se si ignora $\bar{e}_{\cup}$). Tuttavia, come detto in occasione di (17), l'ignorare un evento non è un errore logico. Perciò (50) e (60) sono entrambe valide e differiscono solo in quanto dedotte con diverse argomentazioni.

Quindi in definitiva, il comparire in entrambe le (50) e (60) la stessa vera $\mathfrak{P}\langle e\rangle$ e $\kappa = \Sigma_{m=1,\mathfrak{m}}(n_m \cdot \kappa) / \Sigma_{m=1,\mathfrak{m}}(n_m)$ implicano $\Sigma_{m=1,\mathfrak{m}}(n_m \cdot \rho\langle e_{M} \mid \bar{e}_{M}\rangle) \leq \Sigma_{m=1,\mathfrak{m}}(n_m \cdot \rho\langle e_m \mid \bar{e}_m\rangle) \leq \Sigma_{m=1,\mathfrak{m}}(n_m \cdot \rho\langle e_{M} \mid \bar{e}_{M}\rangle)$ che, essendo evidentemente vera, conferma (50) in quanto viceversa sarebbe erronea qualche parte della precedente argomentazione e quindi potrebbe essere erronea anche la stessa (50).

4 IL CALCOLO DELL'INTERVALLO DI FIDUCIA

L'insieme $\underline{\mathcal{R}}$, di cui la $e \equiv \{X \in \underline{\mathcal{R}}\}$ trattata in sezione 3, è stato definito dalla sola $\underline{\mathcal{R}} \subseteq \underline{\mathfrak{R}}$, perciò se ne ha $\underline{\mathcal{R}} \equiv \cup_{i=1,\mathfrak{i}}(\underline{\mathcal{S}}_i)$ di cui $\underline{\mathcal{S}}_i \equiv [\underline{\mathcal{A}}_i, \underline{\mathcal{B}}_i]$ dove "$[\underline{\mathcal{A}}_i$" e "$\underline{\mathcal{B}}_i]$" possono essere sostituiti dai rispettivi "$(-\infty$" e "$\infty)$". Tale $\underline{\mathcal{R}}$ è una zona della retta reale (un intervallo se $\mathfrak{i} = 1$) di fiducia $\mathfrak{P}\langle e\rangle$ (espressa in (46)) per la costante incognita X.

Il calcolo di $\mathfrak{P}\langle e\rangle$ può avvenire per mezzo di (46) solo se è noto ogni $\rho\langle e_t \mid \bar{e}_t\rangle$ di cui $\bar{e}_t \in \underline{I}$. Per conseguire questa necessaria condizione è sufficiente conoscere delle funzioni

$$\{a_t(\mathcal{A},\mathcal{B}), b_t(\mathcal{A},\mathcal{B}), \mathcal{P}\langle s_t\rangle(x);\ t=1,\mathfrak{t}\}\tag{61}$$

tali da verificare

$$\{\mathcal{A} \leq X \leq \mathcal{B}\}_t \equiv \{a_t(\mathcal{A},\mathcal{B}) \leq s_t \leq b_t(\mathcal{A},\mathcal{B})\} \qquad \bar{e}_t \equiv \{s_t \in \underline{\mathfrak{R}}\}\tag{62}$$

che, in conformità a (40) e (39), hanno come condizione necessaria

$$\{\neg\{\underline{\mathbb{M}}\langle s_A \in \underline{\mathfrak{R}}\rangle \subseteq \underline{\mathbb{M}}\langle s_B \in \underline{\mathfrak{R}}\rangle\};\ \forall\{(A,B) \,|\, \{A,B\} \subseteq \{t=1,\mathfrak{t}\}\}\}\tag{63}$$

Infatti da: (24), $\underline{e}_t \subseteq \underline{\bar{e}}_t$; $\underline{\mathcal{R}} \equiv \cup_{i=1,\mathfrak{i}}(\underline{\mathcal{S}}_i)$, seconda di (36); prima di (20), seconda di (12), $\underline{\mathcal{S}}_i \equiv [\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i]$; (62); (25); segue (coerentemente con (4.2.19) di [1])

$$\rho\langle e_t \mid \bar{e}_t\rangle = \mathfrak{N}\langle \underline{e}_t\rangle / \mathfrak{N}\langle \underline{\bar{e}}_t\rangle = \mathfrak{N}\langle \underline{\mathbb{M}}\langle \cup_{i=1,\mathfrak{i}}(\{X \in \underline{\mathcal{S}}_i\}_t)\rangle\rangle / \mathfrak{N}\langle \underline{\bar{e}}_t\rangle = \Sigma_{i=1,\mathfrak{i}}(\mathfrak{N}\langle \underline{\mathbb{M}}\langle\{\mathcal{A}_i \leq X \leq \mathcal{B}_i\}_t\rangle\rangle / \mathfrak{N}\langle \underline{\bar{e}}_t\rangle) =$$

$$\Sigma_{i=1,\mathfrak{i}}(\mathfrak{N}\langle \underline{\mathbb{M}}\langle a_t(\mathcal{A}_i,\mathcal{B}_i) \leq s_t \leq b_t(\mathcal{A}_i,\mathcal{B}_i)\rangle\rangle / \mathfrak{N}\langle \underline{\mathbb{M}}\langle s_t \in \underline{\mathfrak{R}}\rangle\rangle) = \Sigma_{i=1,\mathfrak{i}}(\int\langle a_t(\mathcal{A}_i,\mathcal{B}_i), b_t(\mathcal{A}_i,\mathcal{B}_i)\rangle(\mathcal{P}\langle s_t\rangle(x) \cdot dx))\tag{64}$$

e quindi (61) consente di conoscere ogni $\rho\langle e_t \mid \bar{e}_t\rangle$ per mezzo di (64).

Questa e il dedurre $\bar{e}_{\cup} \equiv \hat{s}_{\cup}$ di cui $\hat{s}_{\cup} \equiv \cup_{t=1,\mathfrak{t}}(s_t \in \underline{\mathfrak{R}})$, da $\bar{e}_{\cup} \equiv \cup_{t=1,\mathfrak{t}}(\bar{e}_t)$ (in (41)) e seconda di (62), consentono di scrivere (46) come

$$\mathfrak{C}\langle\hat{s}_{\cup}\rangle \underline{\rightarrow} \{\mathfrak{P}\langle e\rangle = \mathfrak{t}^{-1} \cdot \Sigma_{t=1,\mathfrak{t}}(\Sigma_{i=1,\mathfrak{i}}(\int\langle a_t(\mathcal{A}_i,\mathcal{B}_i), b_t(\mathcal{A}_i,\mathcal{B}_i)\rangle(\mathcal{P}\langle s_t\rangle(x) \cdot dx)))\}\tag{65}$$

per la quale è sufficiente conoscere (61) di cui (62) che vale solo se sussiste (63).

La $\mathfrak{P}\langle e\rangle$ è la vera probabilità di e a fronte delle sue alternative meramente convenzionali, però il suo calcolo per mezzo di (65), come si constata almeno nei casi considerati, è impedito dalla eccessiva grandezza di $\mathfrak{t}$ i.e. $\mathfrak{N}\langle \underline{I}\rangle$, conseguendo che in pratica (65) deve essere usata sostituendone $\underline{I}$ con un convenzionale $\underline{I}_C$ di cui $\underline{I}_C \subset \underline{I}$ e potendo quindi valutare non $\mathfrak{P}\langle e\rangle$ ma una sua convenzionale approssimazione $\mathbb{P}_C\langle e\rangle$ che migliora con l'aumentare di $\mathfrak{N}\langle \underline{I}_C\rangle$. Nel seguito questa sostituzione operativa di $\underline{I}$ e $\mathfrak{P}\langle e\rangle$ con $\underline{I}_C$ e $\mathbb{P}_C\langle e\rangle$ è sottintesa, notando in particolare che, in questo uso di (65), la grandezza di $\mathfrak{N}\langle \underline{I}_C\rangle$ e il trattarsi di numeri *floating point* rendono convenienti opportuni accorgimenti quali il noto *Kahan summation algorithm* che può essere scritto come segue in uno pseudo linguaggio derivato dal *Visual Basic*

```
Function SOMMA(A_i; i=1,i)
  Dim S, C, T, Y As Double
C = 0
```

```
S = 0
 For i = 1 To ɨ
   Y = Aᵢ – C
   T = S + Y
   C = T – S – Y
   S = T
 Next
 Return S
End Function
```

con tale **Function** che restituisce $\Sigma_{i=1,\cancel{i}}(A_i)$.

Per un tale uso di (65) specificamente inerente i casi (di grande importanza nelle scienze sperimentali) che $\mathtt{X}$ è la media o la varianza di una variabile casuale normale (i.e. gaussiana), sono di seguito riportate alcune funzioni PDF che specificano la $\mathfrak{P}_S(x)$ di (25) e la cui deduzione analitica è riferita in sez. 6 di [1]. A questo riguardo si ha $\{\mathfrak{P}\langle a\rangle \equiv \mathfrak{P}\langle b\rangle\} \equiv \{a \equiv b\}$.

Una variabile casuale normale g di media M_g e varianza V^2, e la variabile casuale normale standardizzata Z hanno

$$\mathfrak{P}\langle g\rangle(x) \equiv G\langle M_g,V^2\rangle(x) \equiv (2\cdot\pi\cdot V^2)^{-0.5}\cdot \exp\langle -0.5\cdot(x - M_g)^2/V^2\rangle \qquad \mathfrak{P}\langle Z\rangle(x) \equiv Z(x) \equiv G\langle 0,1\rangle(x) \equiv (2\cdot\pi)^{-0.5}\cdot \exp\langle -0.5\cdot x^2\rangle$$

di cui $\underline{\mathfrak{R}}\langle x\rangle = \underline{\mathfrak{R}}\langle g\rangle = \underline{\mathfrak{R}}\langle Z\rangle = \underline{\mathfrak{R}}$, $V > 0$ e $\exp\langle S\rangle \equiv e^S$ con e la nota costante detta di Nepero o Eulero.

In relazione a tali g e Z si ha

$$\int_{a,b}(G\langle M_g,V^2\rangle(x)\cdot dx) = \int\langle (a-M_g)/V,(b-M_g)/V\rangle(Z(x)\cdot dx)$$

il cui secondo membro è calcolabile specificando l'ultima equazione di (25), usando la relazione detta in [18] tra un $\int_{-\infty,c}(Z(x)\cdot dx)$ e la *incomplete gamma function*, e calcolando questa con l'algoritmo esposto in [19].

Con riferimento a sez. 4.1 di [1], un campione $\underline{\mathbb{X}}$ di un universo $\underline{\mathbb{X}}$ è casuale se ogni $\epsilon\langle\underline{\mathbb{X}}\rangle$ è determinato quando ogni $\epsilon\langle\underline{\mathbb{X}}\rangle$ ha la stessa probabilità di avere tale determinazione.

Si intende che $\mathbb{I}\langle\underline{x}\rangle$, con $\underline{x}$ un insieme di $\cancel{k}$ grandezze di cui $\underline{x} \equiv \{x_k;\, k=1,\cancel{k}\}$, significa che tali grandezze sono indipendenti i.e. che $\underline{\mathfrak{R}}\langle x_k\rangle$ non è modificato da alcuna $(\cancel{k} - 1)$-pla di valori che possono rispettivamente avere le restanti $\{x_k;\, k \neq k;\, k=1,\cancel{k}\}$.

Una $\underline{s} \equiv \{s_k;\, k=1,\cancel{k}\}$, di cui $\mathfrak{P}\langle s_k\rangle \equiv \mathfrak{P}\langle s\rangle$, implica che $\underline{s}$ può essere indifferentemente considerato o come un insieme di $\cancel{k}$ variabili casuali che hanno come PDF la stessa $\mathfrak{P}\langle s\rangle(x)$ o come $\cancel{k}$ valori della stessa s. E se nel secondo caso si ha $\mathbb{I}\langle\underline{s}\rangle$, $\underline{s}$ diviene evidente come un campione casuale dell'universo di tutti i valori di s (che è ovviamente diverso dal suo sottoinsieme $\underline{\mathfrak{R}}\langle s\rangle$).

Ponendo $\underline{g} \equiv \{g_a;\, a=1,\cancel{a}\}$, $\mathbb{I}\langle\underline{g}\rangle$, $\mathfrak{P}\langle g_a\rangle \equiv G\langle M_g,V^2\rangle$ e intendendo $m\langle\underline{g}\rangle = \Sigma_{a=1,\cancel{a}}(g_a) / \cancel{a}$, si ha la variabile casuale z di cui

$$\mathfrak{P}\langle z\rangle \equiv Z \qquad z = \cancel{a}^{0.5}\cdot(m_{\underline{g}} - M_g) / V \tag{66}$$

Una variabile casuale χ^2 (chi-quadro) con ν gradi di libertà ha

$$\mathfrak{P}\langle\chi^2\rangle(x) \equiv X\langle\nu\rangle(x) \equiv (2^{\nu/2}\cdot\Gamma(\nu/2))^{-1}\cdot x^{\nu/2-1}\cdot \exp\langle -0.5\cdot x\rangle$$

dove $\underline{\mathfrak{R}}\langle x\rangle = \underline{\mathfrak{R}}\langle\chi^2\rangle = [0,\infty)$, ν è un naturale maggiore di 0, $\Gamma(\alpha)$ è la *funzione gamma* definita da $\Gamma(\alpha) \equiv \int_{0,\infty}(t^{\alpha-1}\cdot e^{-t}\cdot dt)$, $\underline{\mathfrak{R}}\langle\alpha\rangle = (0,\infty)$. Per calcolare un $\int_{-\infty,a}(X\langle\nu\rangle(x)\cdot dx)$ (e rendere (25) utile come testé detto) si riferisce l'algoritmo in [18].

Una variabile casuale T (t di Student) con ν gradi di libertà è definita da una $T = Z / (\chi^2 / \nu)^{0.5}$ di cui $\mathbb{I}\langle Z,\chi^2\rangle$ e ha

$$\mathfrak{P}\langle T\rangle(x) \equiv T\langle\nu\rangle(x) \equiv (\pi\cdot\nu)^{-0.5}\cdot\Gamma^{-1}(\nu / 2)\cdot\Gamma((\nu + 1) / 2)\cdot(1 + x^2 / \nu)^{-(\nu+1)/2} \tag{67}$$

di cui $\underline{\mathfrak{R}}\langle x\rangle = \underline{\mathfrak{R}}\langle T\rangle = \underline{\mathfrak{R}}$. Per calcolare un $\int_{-\infty,a}(T\langle\boldsymbol{\nu}\rangle(x)\cdot dx)$ si riferisce l'algoritmo in [18].

Il numero di tutte le diverse partizioni di un insieme di $\cancel{k}$ elementi è uguale al $\cancel{k}$-esimo numero di Bell (di cui [9], [10], [20]) che si indica $\mathbb{B}\langle\cancel{k}\rangle$. Per la determinazione di tali partizioni si riferisce l'algoritmo in [20].

Si pone $\underline{g} \equiv \{g_a;\, a=1,\cancel{a}\}$ di cui $\cancel{a} > 1$, $\mathbb{I}\langle\underline{g}\rangle$, $\mathfrak{P}\langle g_a\rangle \equiv G\langle M_g,V^2\rangle$, quindi si ha $\{\underline{g} \equiv \underline{g}\} \,\dot{\vee}\, \{\underline{g} \not\equiv \underline{g}\}$ e

$$\{\underline{g} = \{\underline{g}_{ph};\, h=1,\cancel{h}_p\};\, p=1,\mathbb{B}\langle\cancel{a}\rangle\} \tag{68}$$

dove $\{\underline{g}_{ph};\, h=1,\cancel{h}_p\}$ è la p-esima partizione di $\underline{g}$ con $\underline{g}_{ph} \equiv \{g_{phk};\, k=1,\cancel{k}_{ph}\}$, e di cui si pone $\cancel{h}_1 = \cancel{a}$, $\cancel{h}_{\mathbb{B}\langle\cancel{a}\rangle} = 1$.

A questo riguardo si ha (coerentemente con (6.3.26) di [1]), per $\cancel{h}_p > 1$ i.e. $p < \mathbb{B}\langle\cancel{a}\rangle$, $\mathfrak{P}\langle D^2_p / V^2\rangle \equiv X\langle\cancel{h}_p - 1\rangle$ di cui $D^2_p = \Sigma_{h=1,\cancel{h}\langle p\rangle}(\cancel{k}_{ph}\cdot(m_{\underline{g}\langle p,h\rangle} - m_{\underline{g}})^2)$ e, per $\cancel{h}_p < \cancel{a}$ i.e. $p > 1$, $\mathfrak{P}\langle D^2_p / V^2\rangle \equiv X\langle\check{\cancel{N}}_p\rangle$ di cui $D^2_p = \Sigma_{h=1,\cancel{h}\langle p\rangle}(\Sigma_{k=1,\cancel{k}\langle p,h\rangle}((g_{phk} - m_{\underline{g}\langle p,h\rangle})^2))$, $\check{\cancel{N}}_p = \Sigma_{h=1,\cancel{h}\langle p\rangle}(\cancel{k}_{ph} - 1)$. Ciò si scrive

$$\{\mathfrak{P}\langle D^2_p / V^2\rangle \equiv X\langle\cancel{h}_p - 1\rangle, \mathfrak{P}\langle D^2_p / V^2\rangle \equiv X\langle\check{\cancel{N}}_p\rangle;\, p=2,\mathbb{B}\langle\cancel{a}\rangle - 1\} \qquad \mathfrak{P}\langle D^2_1 / V^2\rangle \equiv \mathfrak{P}\langle D^2_{\mathbb{B}\langle\cancel{a}\rangle} / V^2\rangle \equiv \Sigma_{a=1,\cancel{a}}((g_a - m_{\underline{g}})^2) \equiv X\langle\cancel{a} - 1\rangle$$

i.e.

$$\{\mathcal{P}\langle \mathsf{D}^2{}_q / \mathsf{V}^2\rangle \equiv X\langle \boldsymbol{\nu}_q\rangle;\ q{=}1{,}2\cdot\mathscr{B}\langle\cancel{a}\rangle - 3\} \tag{69}$$

di cui

$$\{\mathsf{D}^2{}_1,\boldsymbol{\nu}_1\} \equiv \{\Sigma_{a=1,\cancel{a}}((\mathcal{g}_a - \mathsf{m}_{\underline{g}})^2),\cancel{a} - 1\} \qquad \{\{\mathsf{D}^2{}_q,\boldsymbol{\nu}_q\} \equiv \{\mathrm{D}^2{}_q,\cancel{h}_q - 1\};\ q{=}2,\mathscr{B}\langle\cancel{a}\rangle - 1\}$$

$$\{\{\mathsf{D}^2{}_q,\boldsymbol{\nu}_q\} \equiv \{D^2{}_{p\langle q\rangle},\check{\cancel{N}}_{p\langle q\rangle}\};\ q{=}\mathscr{B}\langle\cancel{a}\rangle,2\cdot\mathscr{B}\langle\cancel{a}\rangle - 3\} \qquad p_q \equiv q - \mathscr{B}\langle\cancel{a}\rangle{+}2 \tag{70}$$

4.1 La media di una variabile casuale normale

Dalle precedenti definizioni di variabili casuali si deduce (con particolare riferimento a (67), (66) e (69))

$$\mathcal{P}\langle \mathtt{t}_q\rangle \equiv T\langle\boldsymbol{\nu}_q\rangle \qquad \mathtt{t}_q = \mathtt{z} / ((\mathsf{D}^2{}_q / \mathsf{V}^2) / \boldsymbol{\nu}_q)^{0.5} = (\mathsf{m}_{\underline{g}} - \mathsf{M}_{g}) / \mathtt{w}_q \qquad \mathtt{w}_q = (\mathsf{D}^2{}_q / (\boldsymbol{\nu}_q\cdot\cancel{a}))^{0.5} \tag{71}$$

Si chiama $\underline{G}$ l'insieme di tutte le combinazioni degli elementi di $\underline{g}$ e perciò si pone $\underline{G} \equiv \{\underline{G}_{\mathrm{u}};\ \mathrm{u}{=}1,\cancel{u}\}$ di cui $\underline{G}_{\mathrm{u}} \equiv \{G_{\mathrm{ua}};\ \mathrm{a}{=}1,\cancel{a}_{\mathrm{u}}\}$, $\cancel{u} = \Sigma_{\mathrm{k}=1,\cancel{a}}(Б\langle\cancel{a},\mathrm{k}\rangle)$. Si chiama $\underline{\mathcal{G}}$ l'insieme di tutte le combinazioni di classe maggiore di 1 degli elementi di $\underline{\mathcal{g}}$ e perciò si pone $\underline{\mathcal{G}} \equiv \{\underline{\mathcal{G}}_u;\ u{=}1,\cancel{u}\}$ di cui $\underline{\mathcal{G}}_u \equiv \{\mathcal{G}_{ua};\ a{=}1,\cancel{a}_u\}$, $\cancel{u} = \Sigma_{\mathrm{k}=2,\cancel{a}}(Б\langle\cancel{a},\mathrm{k}\rangle) = \cancel{u} - \cancel{a}$.

Come (68) si ha anche

$$\{\underline{\mathcal{G}}_u = \{\underline{\mathcal{G}}_{uph};\ h{=}1,\cancel{h}_{up}\};\ p{=}1,\mathscr{B}\langle\cancel{a}_u\rangle\}$$

dove $\{\mathcal{G}_{uph};\ h{=}1,\cancel{h}_{up}\}$ è la p-esima partizione di $\underline{\mathcal{G}}_u$ con $\underline{\mathcal{G}}_{uph} \equiv \{\underline{\mathcal{G}}_{uphk};\ k{=}1,\cancel{k}_{uph}\}$, e di cui si pone $\cancel{h}_{u1} = \cancel{a}_u$, $\cancel{h}_{u\mathscr{B}\langle\cancel{a}\langle u\rangle\rangle} = 1$.

La (71) rimane valida anche se i suoi $\underline{g}$ e $\underline{\mathcal{g}}$ sono sostituiti da rispettivi $\underline{G}_{\mathrm{u}}$ e $\underline{\mathcal{G}}_u$ di cui $\{\underline{G}_{\mathrm{u}} \equiv \underline{\mathcal{G}}_u\} \vee \{\underline{G}_{\mathrm{u}} \not\equiv \underline{\mathcal{G}}_u\}$. Una tale sostituzione in (71) comporta la sostituzione di $\{\mathsf{m}_{\underline{g}},\cancel{a}\}$ con uno dei $\{\{\mathsf{m}_{\underline{G}\langle\mathrm{u}\rangle},\cancel{a}_{\mathrm{u}}\};\ \mathrm{u}{=}1,\cancel{u}\}$ e la sostituzione di $\{\mathsf{D}^2{}_q,\boldsymbol{\nu}_q\}$ con una $\{\mathsf{D}^2{}_{uq},\boldsymbol{\nu}_{uq}\}$ dove u riferisce $\underline{\mathcal{G}}_u$ e si ha $q\in\{q{=}1{,}2\cdot\mathscr{B}\langle\cancel{a}_u\rangle - 3\}$ analogamente a $q\in\{q{=}1{,}2\cdot\mathscr{B}\langle\cancel{a}\rangle - 3\}$ di (69).

Perciò l'insieme di tutte tali sostituzioni può essere indicato $\{\{\mathsf{m}_{\underline{G}\langle\mathrm{u}\rangle},\cancel{a}_{\mathrm{u}},\mathsf{D}^2{}_{uq},\boldsymbol{\nu}_{uq}\};\ q{=}1,\cancel{q}_u;\ u{=}1,\cancel{u};\ \mathrm{u}{=}1,\cancel{u}\}$ di cui $\cancel{q}_u = 2\cdot\mathscr{B}\langle\cancel{a}_u\rangle - 3$, e il (q,u,u)-esimo elemento di tale insieme di $\mathrm{N}_{\underline{g}}$ sostituzioni, di cui $\mathrm{N}_{\underline{g}} = 2\cdot\cancel{u}\cdot\Sigma_{u=1,\cancel{u}}(\mathscr{B}\langle\cancel{a}_u\rangle) - 3\cdot\cancel{u}\cdot\cancel{u}$, dà luogo a

$$\mathcal{P}\langle \mathtt{t}_{\mathrm{u}uq}\rangle \equiv T\langle\boldsymbol{\nu}_{uq}\rangle \qquad \mathtt{t}_{\mathrm{u}uq} = (\mathsf{m}_{\underline{G}\langle\mathrm{u}\rangle} - \mathsf{M}_{g}) / \mathtt{w}_{\mathrm{u}uq} \qquad \mathtt{w}_{\mathrm{u}uq} = (\mathsf{D}^2{}_{uq} / (\boldsymbol{\nu}_{uq}\cdot\cancel{a}_{\mathrm{u}}))^{0.5} \tag{72}$$

di cui si ha, come (70),

$$\{\mathsf{D}^2{}_{u1},\boldsymbol{\nu}_{u1}\} \equiv \{\Sigma_{a=1,\cancel{a}\langle u\rangle}((\mathcal{G}_{ua} - \mathsf{m}\langle\underline{\mathcal{G}}_u\rangle)^2),\cancel{a}_u - 1\} \qquad \{\{\mathsf{D}^2{}_{uq},\boldsymbol{\nu}_{uq}\} \equiv \{\mathrm{D}^2{}_{uq},\cancel{h}_{uq} - 1\};\ q{=}2,\mathscr{B}\langle\cancel{a}_u\rangle - 1\}$$

$$\{\{\mathsf{D}^2{}_{uq},\boldsymbol{\nu}_{uq}\} \equiv \{D^2{}_{up\langle uq\rangle},\check{\cancel{N}}_{up\langle uq\rangle}\};\ q{=}\mathscr{B}\langle\cancel{a}_u\rangle,2\cdot\mathscr{B}\langle\cancel{a}_u\rangle - 3\} \qquad p_{uq} \equiv q - \mathscr{B}\langle\cancel{a}_u\rangle{+}2 \tag{73}$$

dove

$$\mathrm{D}^2{}_{uq} = \Sigma_{h=1,\cancel{h}\langle uq\rangle}(\cancel{k}_{uqh}\cdot(\mathsf{m}_{\underline{\mathcal{G}}\langle uqh\rangle} - \mathsf{m}_{\underline{\mathcal{G}}\langle u\rangle})^2) \qquad D^2{}_{up} = \Sigma_{h=1,\cancel{h}\langle up\rangle}(\Sigma_{k=1,\cancel{k}\langle uph\rangle}((\mathcal{G}_{uphk} - \mathsf{m}_{\underline{\mathcal{G}}\langle uph\rangle})^2)) \qquad \check{\cancel{N}}_{up} = \Sigma_{h=1,\cancel{h}\langle up\rangle}(\cancel{k}_{uph} - 1)$$

La seconda di (72) porta che $\mathcal{A} \le \mathsf{M}_{g} \le \mathcal{B}$ equivale a $\mathsf{m}_{\underline{G}\langle\mathrm{u}\rangle} - \mathcal{B} \le \mathtt{t}_{\mathrm{u}uq}\cdot\mathtt{w}_{\mathrm{u}uq} \le \mathsf{m}_{\underline{G}\langle\mathrm{u}\rangle} - \mathcal{A}$. Pertanto si ha

$$\{\mathcal{A} \le \mathsf{M}_{g} \le \mathcal{B}\}_{\mathrm{u}uq} \equiv \{\alpha_{\mathrm{u}uq}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \le \mathtt{t}_{\mathrm{u}uq} \le \beta_{\mathrm{u}uq}(\mathcal{A},\mathcal{B})\} \qquad \{\mathsf{M}_{g}\in\underline{\mathfrak{R}}\}_{\mathrm{u}uq} \equiv \{\mathtt{t}_{\mathrm{u}uq}\in\underline{\mathfrak{R}}\} \tag{74}$$

di cui $\alpha_{\mathrm{u}uq}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \equiv (\mathsf{m}_{\underline{G}\langle\mathrm{u}\rangle} - \mathcal{B}) / \mathtt{w}_{\mathrm{u}uq}$, $\beta_{\mathrm{u}uq}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \equiv (\mathsf{m}_{\underline{G}\langle\mathrm{u}\rangle} - \mathcal{A}) / \mathtt{w}_{\mathrm{u}uq}$.

Ponendo $\mathcal{A} = \mathsf{m}_{\underline{G}\langle\mathrm{u}\rangle} - \mathcal{K}$ e $\mathcal{B} = \mathsf{m}_{\underline{G}\langle\mathrm{u}\rangle} + \mathcal{K}$ con $\mathcal{K} > 0$, si ha $\alpha_{\mathrm{u}uq}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \equiv -\mathcal{K} / \mathtt{w}_{\mathrm{u}uq}$ e $\beta_{\mathrm{u}uq}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \equiv \mathcal{K} / \mathtt{w}_{\mathrm{u}uq}$. Ciò implica le

$$\{|\mathsf{M}_{g} - \mathsf{m}_{\underline{G}\langle\mathrm{u}\rangle}| \le \mathcal{K}\} \equiv \{\mathsf{m}_{\underline{G}\langle\mathrm{u}\rangle} - \mathcal{K} \le \mathsf{M}_{g} \le \mathsf{m}_{\underline{G}\langle\mathrm{u}\rangle} + \mathcal{K}\} \equiv \{-\mathcal{K} / \mathtt{w}_{\mathrm{u}uq} \le \mathtt{t}_{\mathrm{u}uq} \le \mathcal{K} / \mathtt{w}_{\mathrm{u}uq}\} \tag{75}$$

$$\{\mathsf{m}_{\underline{G}\langle\mathrm{u}\rangle} - \mathcal{K}\cdot\mathtt{w}_{\mathrm{u}uq} \le \mathsf{M}_{g} \le \mathsf{m}_{\underline{G}\langle\mathrm{u}\rangle} + \mathcal{K}\cdot\mathtt{w}_{\mathrm{u}uq}\} \equiv \{-\mathcal{K} \le \mathtt{t}_{\mathrm{u}uq} \le \mathcal{K}\} \tag{76}$$

che, per mezzo di (27), (25) e seconda di (74), consentono rispettivamente, quando $\mathbb{C}\langle\mathtt{t}_{\mathrm{u}uq}\in\underline{\mathfrak{R}}\rangle$, di calcolare la probabilità di $\{|\mathsf{M}_{g} - \mathsf{m}_{\underline{G}\langle\mathrm{u}\rangle}| \le \mathcal{K}\}$ (dove $|\mathsf{M}_{g} - \mathsf{m}_{\underline{G}\langle\mathrm{u}\rangle}|$ può essere considerato l'errore che si compie nel sostituire M_{g} con $\mathsf{m}_{\underline{G}\langle\mathrm{u}\rangle}$) e di determinare un intervallo che contiene M_{g} con probabilità arbitrariamente stabilita tramite $\mathcal{K}$.

Intendendo $Æ\langle \mathrm{v}vz \,/\, \mathrm{u}uq \,/\, \{\mathrm{v}\ne\mathrm{u}\}\vee\{v\ne u\}\vee\{z\ne q\}\rangle$, da: þ; (25); segue

$$\{\{\mathtt{t}_{\mathrm{v}vz}\in\underline{\mathfrak{R}}\} \equiv \{\mathtt{t}_{\mathrm{u}uq}\in\underline{\mathfrak{R}}\}\} \equiv \{\{a \le \mathtt{t}_{\mathrm{v}vz} \le b\} \equiv \{a \le \mathtt{t}_{\mathrm{u}uq} \le b\}\} \underline{\rightarrow} \{\int_{a,b}(\mathcal{P}\langle\mathtt{t}_{\mathrm{v}vz}\rangle(\mathrm{x})\cdot d\mathrm{x}) = \int_{a,b}(\mathcal{P}\langle\mathtt{t}_{\mathrm{u}uq}\rangle(\mathrm{x})\cdot d\mathrm{x})\}$$

però l'ultimo membro di questa è falso e quindi, per (3), è tale anche il primo membro. Ciò implica $\underline{\mathbb{M}}\langle\mathtt{t}_{\mathrm{v}vz}\in\underline{\mathfrak{R}}\rangle \cap \underline{\mathbb{M}}\langle\mathtt{t}_{\mathrm{u}uq}\in\underline{\mathfrak{R}}\rangle = \varnothing$ poiché viceversa si avrebbe un'impossibilità a giustificare quale quella del x-esimo capoverso di pag. x, quindi si ha

$$\neg\{\underline{\mathbb{M}}\langle\mathtt{t}_{\mathrm{v}vz}\in\underline{\mathfrak{R}}\rangle \subseteq \underline{\mathbb{M}}\langle\mathtt{t}_{\mathrm{u}uq}\in\underline{\mathfrak{R}}\rangle\} \tag{77}$$

Si pone $\mathsf{t} \equiv \cup_{u=1,\mathfrak{u}}(\cup_{u=1,\mathfrak{u}}(\cup_{q=1,\mathfrak{q}\langle u\rangle}(\mathtt{t}_{uuq}\in\mathfrak{R})))$. Le ultime due di (72) implicano $\{\mathtt{t}_{uuq}\in\mathfrak{R}\} \equiv \{\mathsf{m}_{\mathbb{G}\langle u\rangle}\in\mathfrak{R}\} \wedge \{\mathsf{D}^2_{uq}\in[0,\infty)\}$. Tali $\{\mathsf{m}_{\mathbb{G}\langle u\rangle}\in\mathfrak{R}\}$ e $\{\mathsf{D}^2_{uq}\in[0,\infty)\}$ accadono se sono noti $\underline{g}$ e $\underline{g}$ (i.e. sono noti i loro $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{a}$ elementi). Quindi questa condizione e l'intenzione di considerare con uguale probabilità uno dei $\mathrm{N}_{\underline{g}}$ eventi che definiscono t sono sufficienti per $\mathbb{C}\langle\mathsf{t}\rangle$.

Le $\{\alpha_{uuq}(\mathcal{A},\mathcal{B}),\beta_{uuq}(\mathcal{A},\mathcal{B}),\mathrm{P}\langle\mathtt{t}_{uuq}\rangle(\mathrm{x}); q=1,\mathfrak{q}_u; u=1,\mathfrak{u}; \mathrm{u}=1,\mathfrak{u}\}$, (74), (77) e M_{g} sono specificazioni di (61), (62), (63) e X, conseguendo che (65) può, coerentemente con il x-esimo capoverso di pag. x, essere specificata dalla seconda relazione delle

$$\{\underline{g}\text{ e }\underline{g}\text{ sono noti}\} \underline{\rightarrow} \mathbb{C}\langle\mathsf{t}\rangle \underline{\rightarrow} \{\mathbb{P}_{\mathrm{C}}\langle\mathrm{M}_{\mathrm{g}}\in\underline{\mathcal{R}}\rangle = \mathrm{N}_{\underline{g}}^{-1}\cdot\Sigma_{u=1,\mathfrak{u}}(\Sigma_{u=1,\mathfrak{u}}(\Sigma_{q=1,\mathfrak{q}\langle u\rangle}(\Sigma_{i=1,\mathfrak{i}}(\textstyle\int\langle\alpha_{uuq}(\mathcal{A}_i,\mathcal{B}_i),\beta_{uuq}(\mathcal{A}_i,\mathcal{B}_i)\rangle(T\langle\mathbf{v}_{uq}\rangle(\mathrm{x})\cdot d\mathrm{x})))))\} \tag{78}$$

di cui $Æ\langle\mathrm{N}_{\underline{g}} / \mathfrak{N}\langle\underline{I}_{\mathrm{C}}\rangle\rangle$ e la cui prima relazione è dovuta al precedente penultimo capoverso al ritenere implicita la detta intenzione.

Come (46) si relaziona a (78), (47) è inerente

$$\{\underline{g}\text{ e }\underline{g}\text{ sono noti}\} \underline{\rightarrow} \mathbb{C}\langle\mathsf{t}\rangle \underline{\rightarrow} \forall_{u=1,\mathfrak{u}}(\forall_{u=1,\mathfrak{u}}(\forall_{q=1,\mathfrak{q}\langle u\rangle}(\rho\langle\{\mathrm{M}_{\mathrm{g}}\in\underline{\mathcal{R}}\}_{uuq} \mid \{\mathrm{M}_{\mathrm{g}}\in\underline{\mathcal{R}}\}_{uuq}\rangle = \mathbb{P}\langle\{\mathrm{M}_{\mathrm{g}}\in\underline{\mathcal{R}}\}_{uuq}\rangle \le \mathbb{P}\langle\mathrm{M}_{\mathrm{g}}\in\underline{\mathcal{R}}\rangle))) \tag{79}$$

dove ogni $\mathbb{P}\langle\{\mathrm{M}_{\mathrm{g}}\in\underline{\mathcal{R}}\}_{uuq}$ è nota e che mostra come, in assenza di (78), sarebbe solo possibile sostituire $\mathbb{P}\langle\mathrm{M}_{\mathrm{g}}\in\underline{\mathcal{R}}\rangle$ con una $\mathbb{P}\langle\{\mathrm{M}_{\mathrm{g}}\in\underline{\mathcal{R}}\}_{uuq}\rangle$ o scegliere una $\mathbb{P}\langle\{\mathrm{M}_{\mathrm{g}}\in\underline{\mathcal{R}}\}_{uuq}\rangle \le \mathbb{P}\langle\mathrm{M}_{\mathrm{g}}\in\underline{\mathcal{R}}\rangle$ tra le tante, ma dovendo così in entrambi i casi compiere una scelta ingiustificabile.

Infatti una tale scelta potrebbe conseguire dal considerare che (73) mostra che

$$\underline{\mathbb{G}}_u \equiv \underline{g} \qquad \{\mathsf{D}^2_{uq},\mathbf{v}_{uq}\} \equiv \{\Sigma_{a=1,\mathfrak{a}}((g_a - \mathsf{m}_{\underline{g}})^2),\mathfrak{a}-1\} \tag{80}$$

comporta un maggiore $\mathbf{v}_{uq}\cdot\mathfrak{a}_u$, e che terza di (72) e (74) mostrano che un maggiore $\mathbf{v}_{uq}\cdot\mathfrak{a}_u$ implica generalmente una maggiore $\mathbb{P}\langle\{\mathcal{A}\le\mathrm{M}_{\mathrm{g}}\le\mathcal{B}\}_{uuq}\rangle$. Tuttavia una probabilità non è resa più affidabile dal solo fatto che è maggiore e quindi non si ha motivo di preferire la $\mathbb{P}\langle\{\mathcal{A}\le\mathrm{M}_{\mathrm{g}}\le\mathcal{B}\}_{uuq}\rangle$ individuata da (80).

Invece (73) e terza di (72) mostrano (80) conveniente quando non si tratta di scegliere (come testé detto) tra più probabilità di uno stesso evento, ma tra gli eventi definiti da (75) e (76) poiché è evidente che generalmente in questi casi comporta rispettivamente la maggiore $\mathbb{P}\langle|\mathrm{M}_{\mathrm{g}} - \mathsf{m}_{\mathbb{G}\langle u\rangle}| \le \mathcal{K}\rangle$ e l'intervallo più ampio tra quelli che hanno uguale probabilità di contenere M_{g}. Ciò è confermato dalla *legge dei grandi numeri* (di cui anche in sezione 5.3.1 di [1]) che afferma

$$\lim_{\mathfrak{a}\to\infty}(\mathbb{P}\langle|\mathsf{m}_{\underline{g}} - \mathrm{M}_{\mathrm{g}}| > 0\rangle) = 0$$

per cui generalmente l'aumentare di $\mathfrak{a}$ comporta un $\mathsf{m}_{\underline{g}}$ più prossimo a M_{g} e quindi una maggiore $\mathbb{P}\langle|\mathrm{M}_{\mathrm{g}} - \mathsf{m}_{\mathbb{G}\langle u\rangle}| \le \mathcal{K}\rangle$.

Intendendo $\{\mathfrak{s}_n; n=1,\mathrm{N}_{\underline{g}}\} \equiv \{\mathfrak{s}_{uuq}; q=1,\mathfrak{q}_u; u=1,\mathfrak{u}; \mathrm{u}=1,\mathfrak{u}\}$, per una C-esima combinazione lineare T_{C} di $\{\mathtt{t}_n; n=1,\mathrm{N}_{\underline{g}}\}$ definita da arbitrarie costanti non negative $\{\lambda_{\mathrm{C}n}; n=1,\mathrm{N}_{\underline{g}}\}$, si ha $\mathrm{T}_{\mathrm{C}} \equiv \Sigma_{n=1,\mathrm{N}\langle\underline{g}\underline{g}\rangle}(\lambda_{\mathrm{C}n}\cdot\mathtt{t}_n) = h_{\mathrm{C}} - k_{\mathrm{C}}\cdot\mathrm{M}_{\mathrm{g}}$ di cui $h_{\mathrm{C}} \equiv \Sigma_{n=1,\mathrm{N}\langle\underline{g}\underline{g}\rangle}(\lambda_{\mathrm{C}n}\cdot\mathsf{m}_{\mathbb{G}\langle n\rangle}/\mathrm{w}_n)$, $k_{\mathrm{C}} \equiv \Sigma_{n=1,\mathrm{N}\langle\underline{g}\underline{g}\rangle}(\lambda_{\mathrm{C}n}/\mathrm{w}_n)$. Una combinazione lineare di variabili casuali è un'ulteriore variabile casuale la cui PDF è sempre calcolabile con i metodi generali quali quelli di sezione 5.2 di [1] o più efficientemente con metodi specificamente inerenti le date variabili casuali. Si deduce $\{\mathcal{A}\le\mathrm{M}_{\mathrm{g}}\le\mathcal{B}\}_{\mathrm{C}} \equiv \{h_{\mathrm{C}} - k_{\mathrm{C}}\cdot\mathcal{B} \le \mathrm{T}_{\mathrm{C}} \le h_{\mathrm{C}} - k_{\mathrm{C}}\cdot\mathcal{A}\}$ e quindi relazioni analoghe alle (74). Inoltre per due variabili casuali T_{A} e T_{B}, anche esse combinazioni lineari come T_{C}, si deduce una relazione analoga a (77). Infine quanto testé può essere reiterato aggiungendo variabili del tipo T_{C} alle variabili di cui si considerano le combinazioni lineari. È perciò evidente come, senza dover considerare altre variabili, il numero di variabili di (78) (i.e. la specificazione di $\mathfrak{N}\langle\underline{I}_{\mathrm{C}}\rangle$) possa essere aumentato illimitatamente, conseguendo evidente anche la necessità (detta al x-esimo capoverso di pag. x) di sostituire la vera $\mathfrak{P}\langle\mathrm{M}_{\mathrm{g}}\in\underline{\mathcal{R}}\rangle$ con una probabilità convenzionale quale la $\mathbb{P}_{\mathrm{C}}\langle\mathrm{M}_{\mathrm{g}}\in\underline{\mathcal{R}}\rangle$ di (78).

La numerosità dell'universo di tutti i valori di g è illimitata in conseguenza (con riferimento alla sezione 4 di [1]) della continuità di $\mathrm{P}\langle\mathrm{g}\rangle$, seguendo che è illimitato il numero di campioni di tale universo. Ciò e l'essere $\underline{g}$ uno di tali campioni implicano che è illimitato il numero di casi quali (74). È perciò evidente un altro motivo che rende illimitata la numerosità dell'attuale specificazione di $\underline{I}$ e che rende di conseguenza necessaria l'anzidetta sostituzione di con una probabilità convenzionale.

Coerentemente con quanto testé, una migliore approssimazione di $\mathfrak{P}\langle\mathrm{M}_{\mathrm{g}}\in\underline{\mathcal{R}}\rangle$ è generalmente conseguita con una maggiore $\mathfrak{N}\langle\underline{g}\rangle$.

Nel concludere questa sezione si nota incidentalmente che $\mathrm{a}\ne\mathrm{b}$ (che implica $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}\ne\mathbb{G}_{\mathrm{b}}$) e $\mathfrak{C}\langle\mathbb{G}_u\rangle\in\underline{\mathfrak{R}}$ (dovuta a $\mathbb{I}\langle\underline{g}\rangle$) evidenziano $\mathbb{I}\langle\mathsf{m}_{\mathbb{G}\langle a\rangle},\mathsf{m}_{\mathbb{G}\langle b\rangle}\rangle$ e quindi $\mathbb{I}\langle\mathtt{t}_{\mathrm{acd}},\mathtt{t}_{\mathrm{b}cd}\rangle$, e che invece $\underline{\mathfrak{R}}\langle\mathrm{w}_{uuq}\rangle = [0,\infty)$ mostra che da $\mathtt{t}_{uuq}\ge 0$ segue $\mathtt{t}_{\mathrm{uef}}\ge 0$, conseguendo $\neg\mathbb{I}\langle\mathtt{t}_{uuq},\mathtt{t}_{\mathrm{uef}}\rangle$ poiché $\underline{\mathfrak{R}}\langle\mathtt{t}_{\mathrm{uef}}\rangle = \underline{\mathfrak{R}}$.

4.2 La varianza di una variabile casuale normale

In relazione a $\hat{\underline{g}} \equiv \{\hat{\underline{g}}_a; a=1,\hat{\mathfrak{a}}\}$, $\mathbb{I}\langle\hat{\underline{g}}\rangle$, $\mathrm{P}\langle\hat{\underline{g}}_a\rangle \equiv G\langle\mathrm{M}_{\hat{g}},\mathrm{V}_{\hat{g}}^2\rangle$, $\hat{\underline{g}} \equiv \{\hat{\underline{g}}_a; a=1,\hat{\mathfrak{a}}\}$, $\mathbb{I}\langle\hat{\underline{g}}\rangle$, $\mathrm{P}\langle\hat{\underline{g}}_a\rangle \equiv G\langle\mathrm{M}_{\hat{g}},\mathrm{V}_{\hat{g}}^2\rangle$, si ha, coerentemente con (6.2.29) di [1],

$$\mathbb{I}\langle\mathsf{m}\langle\hat{\underline{g}}\rangle,\mathsf{m}\langle\hat{\underline{g}}\rangle\rangle \underline{\rightarrow} \{\mathrm{P}\langle(\mathsf{m}_{\hat{g}} - \mathsf{m}_{\hat{g}} + \mathrm{M}_{\hat{g}} - \mathrm{M}_{\hat{g}})/(\mathrm{V}_{\hat{g}}^2/\hat{\mathfrak{a}} + \mathrm{V}_{\hat{g}}^2/\hat{\mathfrak{a}})^{0.5}\rangle = Z\}$$

Questa, considerando che in relazione alla $\underline{\mathbb{G}} \equiv \{\mathbb{G}_u; u=1,\mathfrak{u}\}$ di sezione 4.1 si ha $\mathbb{I}\langle\mathbb{G}_u\rangle$ (dovuta a $\mathbb{I}\langle\underline{g}\rangle$), $\mathrm{P}\langle\mathfrak{C}\langle\mathbb{G}_u\rangle\rangle \equiv G\langle\mathrm{M}_{\mathrm{g}},\mathrm{V}^2\rangle$ e (come detto in sez. 4.1) $\mathbb{I}\langle\mathsf{m}_{\mathbb{G}\langle a\rangle},\mathsf{m}_{\mathbb{G}\langle b\rangle}\rangle$, implica $\mathrm{P}\langle(\mathsf{m}_{\mathbb{G}\langle a\rangle} - \mathsf{m}_{\mathbb{G}\langle b\rangle})/(\mathrm{V}^2/\mathfrak{a}_a + \mathrm{V}^2/\mathfrak{a}_b)^{0.5}\rangle \equiv Z$. Questa, $\{\mathrm{P}\langle\mathrm{s}\rangle \equiv Z\} \equiv \{\mathrm{s} \equiv Z\}$ e $\mathrm{P}\langle Z^2\rangle(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^{-0.5}\cdot Z(\mathrm{x}^{0.5})$ (di cui $\underline{\mathfrak{R}}\langle\mathrm{x}\rangle = \underline{\mathfrak{R}}\langle Z^2\rangle = [0,\infty)$) affermata da (6.2.7) di [1], danno luogo a

$$\wp\langle z^2{}_{ab}\rangle(x) = x^{-0.5}\cdot\mathcal{Z}(x^{0.5}) \equiv \mathcal{X}\langle 1\rangle(x) \qquad z^2{}_{ab} = y^2{}_{ab} / V^2 \qquad y^2{}_{ab} = (m_{\underline{G}\langle a\rangle} - m_{\underline{G}\langle b\rangle})^2 / (\cancel{a}_a{}^{-1} + \cancel{a}_b{}^{-1})$$

la cui seconda porta che $\mathcal{A} \leq V^2 \leq \mathcal{B}$ (di cui si sottintende $\mathcal{A} \geq 0$) equivale a $y^2{}_{ab} / \mathcal{B} \leq z^2{}_{ab} \leq y^2{}_{ab} / \mathcal{A}$. Pertanto si ha

$$\{\mathcal{A} \leq V^2 \leq \mathcal{B}\}_{ab} \equiv \{y^2{}_{ab} / \mathcal{B} \leq z^2{}_{ab} \leq y^2{}_{ab} / \mathcal{A}\} \qquad \{V^2 \in [0,\infty)\}_{ab} \equiv \{z^2{}_{ab} \in [0,\infty)\} \tag{81}$$

di cui $\{a,b\} \in \{\{a,b\}; b=a+1,\cancel{u}; a=1,\cancel{u}-1\}$ (con $\cancel{u} = \Sigma_{k=1,\cancel{a}}(Б\langle\cancel{a},k\rangle)$, $\cancel{a} = \mathfrak{N}\langle\underline{g}\rangle$ come in sez. 4.1) in quanto $\{a,b\}$ è una delle $Б\langle\cancel{u},2\rangle$ combinazione di classe 2 di $\{u=1,\cancel{u}\}$.

Da $Æ\langle\{\mathbf{D}^2{}_{uq},\mathbf{v}_{uq}\},(73) \,/\, \{\mathbf{D}^2{}_q,\mathbf{v}_q\},(70) \,/\, (69)\rangle$ si deduce

$$\wp\langle z^2{}_{uq}\rangle \equiv \mathcal{X}\langle\mathbf{v}_{uq}\rangle \qquad z^2{}_{uq} = \mathbf{D}_{uq}{}^2 / V^2$$

la cui seconda dà luogo a

$$\{\mathcal{A} \leq V^2 \leq \mathcal{B}\}_{uq} \equiv \{\mathbf{D}_{uq}{}^2 / \mathcal{B} \leq z^2{}_{uq} \leq \mathbf{D}_{uq}{}^2 / \mathcal{A}\} \qquad \{V^2 \in [0,\infty)\}_v \equiv \{z^2{}_{uq} \in [0,\infty)\} \tag{82}$$

di cui $\{u,q\} \in \{\{u,q\}; q=1,\cancel{q}_u; u=1,\cancel{u}\}$ con $\cancel{q}_u$ e $\cancel{u}$ esprimibili come detto in sezione 4.1 ed essendo perciò $\{u,q\}$ elemento di un insieme di numerosità $N_{\underline{g}} / \cancel{u}$.

Le (81) e (82) danno luogo a

$$\{\mathcal{A} \leq V^2 \leq \mathcal{B}\}_v \equiv \{\alpha_v(\mathcal{A},\mathcal{B}) \leq r^2{}_v \leq \beta_v(\mathcal{A},\mathcal{B})\} \qquad \{V^2 \in [0,\infty)\}_v \equiv \{r^2{}_v \in [0,\infty)\} \tag{83}$$

di cui $\alpha_v(\mathcal{A},\mathcal{B}) \equiv \psi^2{}_v / \mathcal{B}$, $\beta_v(\mathcal{A},\mathcal{B}) \equiv \psi^2{}_v / \mathcal{A}$,

$$\{r^2{}_v,\psi^2{}_v; v=1,\cancel{v}\} \equiv \{\{z^2{}_{ab},y^2{}_{ab}; b=a+1,\cancel{u}; a=1,\cancel{u}-1\},\{z^2{}_{uq},\mathbf{D}_{uq}{}^2; q=1,\cancel{q}_u; u=1,\cancel{u}\}\}$$

con $\cancel{v} = Б\langle\cancel{u},2\rangle + N_{\underline{g}} / \cancel{u}$. Ciò consente per V^2 risultati analoghi a quelli ottenuti per $M_{\underline{g}}$ al x-esimo capoverso di pag. x.

Come (77) si deduce anche

$$\{\neg\{\underline{M}\langle r^2{}_a \in \underline{\mathfrak{R}}\rangle \subseteq \underline{M}\langle r^2{}_b \in \underline{\mathfrak{R}}\rangle\}; \forall a \neq b\} \tag{84}$$

Si pone $\mathsf{r} \equiv \cup_{v=1,\cancel{v}}(r^2{}_v \in [0,\infty))$. Come per $\mathfrak{C}\langle\mathsf{t}\rangle$ in (78), anche per $\mathfrak{C}\langle\mathsf{r}\rangle$ si deducono sufficienti la conoscenza di $\underline{g}$ e $\underline{\mathcal{g}}$ e l'intenzione di considerare con uguale probabilità uno dei $\cancel{v}$ eventi che definiscono r.

Le $\{\alpha_v(\mathcal{A},\mathcal{B}),\beta_v(\mathcal{A},\mathcal{B}),\wp\langle r^2{}_v\rangle(x); v=1,\cancel{v}\}$, (83), (84) e V^2 sono specificazioni di (61), (62), (63) e X, conseguendo che (65) può, coerentemente con il x-esimo capoverso di pag. x, essere specificata dalla seconda relazione delle

$$\{\underline{g} \text{ e } \underline{\mathcal{g}} \text{ sono noti}\} \underline{\rightarrow} \mathfrak{C}\langle\mathsf{r}\rangle \underline{\rightarrow} \{\mathfrak{P}_C\langle V^2 \in \underline{\mathfrak{R}}\rangle = \cancel{v}^{-1}\cdot\Sigma_{v=1,\cancel{v}}(\Sigma_{i=1,\cancel{i}}(\textstyle\int\langle\alpha_v(\mathcal{A}_i,\mathcal{B}_i),\beta_v(\mathcal{A}_i,\mathcal{B}_i)\rangle(\wp\langle r^2{}_v\rangle(x)\cdot dx)))\} \tag{85}$$

di cui $\underline{\mathfrak{R}} \subseteq [0,\infty)$ in quanto $\wp\langle r^2{}_v\rangle(x)$ non è definita per $x \notin [0,\infty)$, e la cui prima relazione è dovuta al precedente penultimo capoverso al ritenere implicita la detta intenzione.

Come (46) si relaziona a (85), (47) è inerente

$$\{\underline{g} \text{ e } \underline{\mathcal{g}} \text{ sono noti}\} \underline{\rightarrow} \mathfrak{C}\langle\mathsf{r}\rangle \underline{\rightarrow} \dot{\forall}_{v=1,\cancel{v}}(\mathfrak{P}\langle\{V^2 \in \underline{\mathfrak{R}}\}_v\rangle \leq \mathfrak{P}\langle V^2 \in \underline{\mathfrak{R}}\rangle) \tag{86}$$

dove ogni $\mathfrak{P}\langle\{V^2 \in \underline{\mathfrak{R}}\}_v\rangle$ è conoscibile e che mostra come, in assenza di (85), sarebbe solo possibile sostituire $\mathfrak{P}\langle V^2 \in \underline{\mathfrak{R}}\rangle$ con una $\mathfrak{P}\langle\{V^2 \in \underline{\mathfrak{R}}\}_v$ o scegliere una $\mathfrak{P}\langle\{V^2 \in \underline{\mathfrak{R}}\}_v\rangle \leq \mathfrak{P}\langle V^2 \in \underline{\mathfrak{R}}\rangle$ tra le tante, ma dovendo così in entrambi i casi compiere una scelta ingiustificabile. Infatti anche in questo caso una $\mathfrak{P}\langle\{V^2 \in \underline{\mathfrak{R}}\}_v\rangle$ non sarebbe resa più affidabile dall'essere generalmente maggiore.

Per una C-esima combinazione lineare $R^2{}_C$ di $\{r^2{}_v; v=1,\cancel{v}\}$ definita da arbitrarie costanti non negative $\{\lambda_{Cv}; v=1,\cancel{v}\}$, si ha $R^2{}_C \equiv \Sigma_{v=1,\cancel{v}}(\lambda_{Cv}\cdot r^2{}_v) = h_C{}^2 / V^2$ di cui $h_C{}^2 \equiv \Sigma_{v=1,\cancel{v}}(\lambda_{Cv}\cdot\psi^2{}_v)$, $\{\mathcal{A} \leq V^2 \leq \mathcal{B}\}_C \equiv \{h_C{}^2 / \mathcal{B} \leq R^2{}_C \leq h_C{}^2 / \mathcal{A}\}$. Quindi anche in questo caso, come al x-esimo capoverso di pag. x, si deducono la possibilità di aumentare illimitatamente il numero di variabili di (85) e la conseguente necessità di sostituire $\mathfrak{P}\langle V^2 \in \underline{\mathfrak{R}}\rangle$ con una probabilità convenzionale quale la $\mathfrak{P}_C\langle V^2 \in \underline{\mathfrak{R}}\rangle$ (85). A questo riguardo sono immediate le ulteriori considerazione analoghe a quelle della precedente sezione e in particolare come una maggiore $\mathfrak{N}\langle\underline{g}\rangle$ comporti generalmente una migliore approssimazione di $\mathfrak{P}\langle V^2 \in \underline{\mathfrak{R}}\rangle$.

CONCLUSIONI

L'utilità di una probabilità consiste in definitiva nell'essere una misura della possibilità di accadere un evento ed è ovviamente impedita quando coesistono diverse probabilità di uno stesso evento tra cui non è possibile individuarne una come la sola totalmente affidabile.

Un tale impedimento è tipico nel trattare un intervallo di fiducia, come si constata nelle sezioni 4.1 e 4.2 dove è chiaro che, in assenza delle (78) e (85), si avrebbe, in ambedue i casi e coerentemente con (79) e (86), un numero illimitato di diverse ed ugualmente affidabili fiducie i.e. probabilità di uno stesso evento.

Tuttavia nelle usuali trattazioni queste difficoltà non hanno rilievo, in quanto, tra le tante ugualmente affidabili e generalmente diverse fiducie, sono considerate solo quelle deducibili dall'intero campione e si sceglie una di queste in modo arbitrario o perché è l'unica contingentemente calcolabile. A questo riguardo si nota che la (8.5) di [1] non costituisce un progresso definitivo a causa del suo carattere sostanzialmente convenzionale.

In conseguenza di ciò lo scopo essenziale di questo lavoro è stato di contestualizzare e circostanziare concetti e procedure con cui poter definire e calcolare una sola fiducia come la sola totalmente affidabile.

Questo scopo è stato conseguito soddisfacentemente in quanto si è pervenuti alla (46) (i.e. (65)) dove, come detto nel x-esimo capoverso di pag. x, la ricercata fiducia è espressa in modo che, pure non essendo esattamente calcolabile, è però illimitatamente approssimabile.

BIBLIOGRAFIA

1. G. Lorenzoni, *Argomentazioni analitiche di probabilità e statistica*, Aracne editrice, Roma, 2013.
2. W. Rautenberg, *A Concise Introduction to Mathematical Logic*, Springer Science+Business Media, New York, 2010.
3. D. Zambella, *Elementi di Logica*, Quaderno 19, Quaderni Didattici del Dipartimento di Matematica, Università di Torino, 2003.
4. E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, 4th ed., Chapman & Hall, London, 1997.
5. A. Ghizzetti, *Lezioni di analisi matematica*, vol. I, Veschi, Roma, 1972.
6. M. H. DeGroot, M. J. Schervish, *Probability and statistics*, 4th ed., Pearson Education, Inc., Boston, 2012.
7. T. T. Soong, *Fundamentals of Probability and Statistics for Engineers*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2004.
8. I. Düntsch, G. Gediga, *Sets, Relations, Functions*, Methodos Publishers (UK), Bangor, 2000.
9. P. Flajolet, R. Sedgewick, *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/book.pdf, 2009.
10. R. Sprugnoli, *An Introduction to Mathematical Methods in Combinatorics*, Dipartimento di Sistemi e Informatica, Università di Firenze, http://www.dsi.unifi.it/~resp/Handbook.pdf, 2006.
11. H. van Elst, *Foundations of Descriptive and Inferential Statistics*, arXiv:1302.2525v2 [stat.AP], http://arxiv.org/abs/1302.2525, 2013.
12. R. E. Walpole, R. H. Myers, S. L. Myers, K. Ye, *Probability & Statistics for Engineers & Scientists*, 9th ed., Pearson Education Inc., Boston, 2012.
13. I. Epifani, *Intervalli di confidenza*, Appunti delle lezioni del corso di Statistica, Politecnico di Milano, http://www1.mate.polimi.it/~ileepi/dispense/0708STAT/intervalliconfidenza.pdf, 2010.
14. S. Bonaccorsi, *Appunti di Probabilità*, Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Trento, http://disi.unitn.it/locigno/didattica/PE/appunti_Bonaccorsi.pdf, 2005.
15. F. M. Dekking, C. Kraaikamp, H. P. Lopuhaä, L. E. Meester, *A Modern Introduction to Probability and Statistics*, Springer, London, 2005.
16. S. M. Ross, *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, 3th ed., Elsevier Inc., Burlington, 2004.
17. D. C. Montgomery, G. C. Runger, *Applied Statistics and Probability for Engineers*, 3th ed., John Wiley & Sons Ltd, New York, 2003.
18. C. Walck, *Hand-book on Statistical Distributions for Experimentalists*, Particle Physics Group, Fysikum University of Stockholm, Internal Report SUFPFY/9601, http://www.stat.rice.edu/~dobelman/textfiles/DistributionsHandbook.pdf, 2007.
19. W. H. Press, S. A. Teukolsk, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, Numerical Recipes in FORTRAN 77, 2th ed., V. 1, Cambridge University Press, 1997.
20. H. C. Thanh and N. Q. Thanh, *An Efficient Parallel Algorithm for the Set Partition Problem*, Studies in Computational Intelligence, Springer, Vol. 351, pp. 25-32, 2011.